

# 燃烧室—喷管流场数值解\*

周传辉 方丁酉

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 本文用时间相关法计算了固体火箭发动机燃烧室—喷管亚跨声速流场数值解, 控制方程用 MacCormack 二步显格式; 边界点参数用物理边界条件和参考平面上的特征方程计算。计算表明, 达到收敛的数值积分步数比纯喷管的跨声速计算要多得多。虽然喷管壁上和轴线上的马赫数分布与纯喷管计算类似, 但喷管中的等马赫线分布与纯喷管计算的结果<sup>[3]</sup> 相差较远。

**关键词** 流场数值计算, 固体火箭发动机, 性能计算

**分类号** V430

固体火箭发动机燃烧室—喷管流场的特性, 对发动机的设计和性能预估都有很大的影响。过去的计算中, 大多是纯喷管计算, 往往达不到预期的精度。特别是潜入喷管, 难于精确给出喷管入口的流动条件, 需要把燃烧室和喷管作为一个统一体来考虑。本文采用时间相关法计算流场的定常解, 坐标变换采用贴体坐标系统, 控制方程用有限差分法求数值解。边界参数用参考平面中的特征方程和物理边界条件来求解。通过算例的计算比较了粗细网格和喷喉曲率半径对流场的影响。

## 1 控制方程和坐标变换

轴对称无粘流的无因次化控制方程为<sup>[1]</sup>:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + H = 0 \quad (1)$$

式中

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho e]$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(e + p/\rho) \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(e + p/\rho) \end{bmatrix}$$

\* 1992年8月20日收稿, 1993年6月25日修改

$$H = \begin{bmatrix} \rho v / y \\ \rho u v / y \\ \rho v^2 / y \\ \rho v (e + p / \rho) / y \end{bmatrix}$$

$$p = (\gamma - 1) \left( \rho e - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$$

其中  $\rho$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $p$ 、 $e$  是燃气的密度、轴向速度、径向速度、压强和单位质量的能量（包括内能和动能）； $\gamma$  是燃气的比热比。

数值求解的流域是药柱通道和喷管，如图 1 所示。其边界由推进剂燃面、前封头壁面、点火器壁面、对称轴、后封头壁面、潜入喷管背壁、潜入喷管气动型面和出口边界组成。本文主要解决亚跨声速流场计算，喷管出口边界取在喷管几何喉部稍下游的超声速流场内。

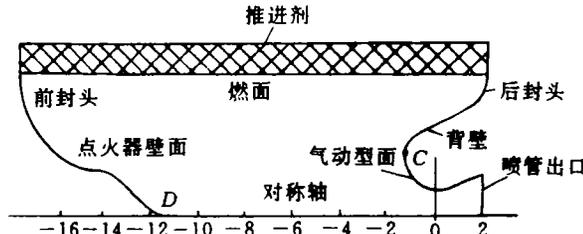


图 1 物理平面上的流域

为了便于用有限差分法数值解控制方程，需要把图 1 所示的复杂流域变换为计算平面上的矩形域。采用贴体坐标系，与矩形域四条边界相对应的物理平面上的边界为：

$\zeta=0$  —— 燃面； $\eta=0$  —— 前封头壁、点火器壁和轴线； $\zeta=\zeta_N$  —— 出口边界； $\eta=\eta_M$  —— 后封头壁、潜入喷管背壁和气动型面。

其中  $\zeta_N$  是与出口边界相对应的  $\zeta$  值， $\eta_M$  是与喷管壁面边界相对应的  $\eta$  值。坐标变换方法见文献[1]，矩形域中小网格的  $\Delta\zeta=1$ ， $\Delta\eta=1$ 。

在计算平面上的控制方程为<sup>[1]</sup>：

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} + \tilde{H} = 0 \quad (2)$$

式中

$$\tilde{U} = JU, \quad \tilde{F} = y_\eta F - X_\eta G, \quad \tilde{G} = -y_\zeta F + X_\zeta G$$

$$\tilde{H} = JH, \quad J = X_\zeta y_\eta - X_\eta y_\zeta$$

## 2 计算内部点参数的差分方程

本文采用 MacCormack 二步显格式求数值解，其预报步为：

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\tilde{F}_{i,j}^n - \tilde{F}_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\tilde{G}_{i,j}^n - \tilde{G}_{i,j-1}^n) - \Delta t \cdot H_{i,j}^n + S_{i,j}^n \quad (3)$$

校正步为

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ U_{i,j}^n + U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\tilde{F}_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{F}_{i,j}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{J_{i,j}} (\tilde{G}_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{G}_{i,j}^{n+1}) - \Delta t \cdot H_{i,j}^{n+1} \right] + S_{i,j}^{n+1} \quad (4)$$

式中  $S_{i,j}^n$  和  $S_{i,j}^{n+1}$  是人工粘性项，按下式计算：

$$S_{i,j} = C_x \frac{|\rho_{i+1,j} - 2\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}|}{\rho_{i+1,j} + 2\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})$$

$$+ c_v \frac{|p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}|}{p_{i,j+1} + 2p_{i,j} + p_{i,j-1}} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) \quad (5)$$

该人工粘性项在数量上是四阶小量。因此，它不影响二阶精度的差分格式解的精度，但对于平滑流场、特别是捕捉激波有利。

为保证数值稳定，时间步长按下式计算<sup>[2]</sup>：

$$\Delta t_{i,j} = c \left( \frac{\Delta l}{q + a} \right)_{i,j} \quad (6)$$

式中  $\Delta l_{i,j} = \sqrt{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2}$ ;  $g_{i,j} = \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2}$ ;  $a_{i,j} = \sqrt{\gamma p_{i,j} / \rho_{i,j}}$

为加速计算收敛，采用当地时间步长，其中  $c$  为常数。

### 3 边界点参数的计算

燃烧室—喷管流场的边界比较复杂，有燃烧表面、上固壁边界、下固壁边界、轴线边界和出口边界。上固壁边界包括后封头、潜入喷管背壁和气动型面，下固壁边界包括前封头和点火器壁面。

#### 3.1 燃面边界

燃面边界的物理边界条件是：

$$u_{1,j} = 0 \quad (7)$$

和

$$v_{1,j} = b p_0^{n-1} \rho_p \sqrt{RT_0} p_{1,j}^n / \rho_{1,j} \quad (8)$$

式(8)是根据燃面上质量守恒得到的，其中  $b$ 、 $n$  和  $\rho_p$  是推进剂燃速系数、压强指数和密度， $R$  是燃气气体常数， $p_0$ 、 $T_0$  是燃气的总压和总温。

根据  $\eta = \text{常数}$  的参考平面内的特征线方法分析得知，只有  $\lambda_-$  特征线在流场内，沿  $\lambda_-$  特征线的相容性方程提供了一个计算边界条件。 $\lambda_-$  特征线方程为：

$$\left( \frac{dt}{d\xi} \right)_- = \lambda_- = \frac{J}{(y_\eta u - x_\eta v) - a \sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}$$

式中

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

沿  $\lambda_-$  的相容性方程为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_-} (u_\xi + \lambda_- u_\eta) - \frac{x_\eta}{y_\eta \lambda_-} (v_\xi + \lambda_- v_\eta) - \frac{\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}{\rho a y_\eta \lambda_-} (p_\xi + \lambda_- p_\eta) \\ & - \frac{1}{J} \left[ (y_\xi u - x_\xi v) - \frac{y_\xi}{y_\eta} a \sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2} \right] u_\eta + \frac{1}{J} \left[ \frac{x_\eta}{y_\eta} (y_\xi u - x_\xi v) \right. \\ & \quad \left. - \frac{x_\xi}{y_\eta} a \sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2} \right] v_\eta - \frac{1}{J \rho a} \left[ \frac{a (y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta)}{y_\eta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}{y_\eta} (y_\xi u - x_\xi v) \right] p_\eta - \frac{\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2}}{y_\eta} \frac{a v}{y} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

物理边界条件和计算边界条件提供了三个计算方程，还必须给定一个条件。本文假设燃气的总温是已知的，由此可得：

$$T = 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}(u^2 + v^2) \quad (10)$$

方程(7)~(10)组成了计算燃面上各点参数的计算方程组。对于偏微分方程,利用特征差分格式求解。

### 3.2 固壁边界

固壁边界有上固壁边界(简称上壁面)和下固壁边界(简称下壁面),分别对应于计算平面上  $\eta = \eta_M$  边界和  $\eta = 0$  的部分边界。

固壁边界的物理边界条件为:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_w(x) = v_w/u_w \quad (11)$$

式中  $\alpha$  是壁面切线与轴向的夹角,  $y_w(x)$  是壁面母线方程, 下标  $w$  代表壁面。为书写方便, 省略下标  $w$ 。

根据  $\zeta = \text{常数}$  参考平面内的特征线方法分析得知, 对于上壁面,  $\lambda_0$ 、 $\lambda_+$  特征线在流场内, 沿  $\lambda_0$  和  $\lambda_+$  特征线的相容性方程有三个, 提供了三个计算边界条件。对于下壁面,  $\lambda_0$ 、 $\lambda_-$  特征线在流场内, 沿这二条特征线的相容性方程也提供了三个计算边界条件。因此, 固壁点的参数可由一个物理边界条件和三个计算边界条件来计算。 $\lambda_0$  和  $\lambda_{\pm}$  的特征线方程为:

$$\left(\frac{dt}{d\eta}\right)_0 = \lambda_0 = \frac{J}{-y_{\zeta}u + x_{\zeta}v} = \infty$$

$$\left(\frac{dt}{d\eta}\right)_{\pm} = \lambda_{\pm} = \frac{J}{(-y_{\zeta}u + x_{\zeta}v) \pm a\sqrt{y_{\zeta}^2 + x_{\zeta}^2}} = \frac{J}{\pm a\sqrt{y_{\zeta}^2 + x_{\zeta}^2}}$$

沿  $\lambda_{\pm}$  和  $\lambda_0$  的相容方程为:

$$\pm (\operatorname{tg} \alpha)u_i \mp v_i - \frac{1}{\rho a} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} p_i = H_{1\pm} \quad (12)$$

$$\rho_i - \frac{1}{a^2} p_i = H_2 \quad (13)$$

$$u_i + (\operatorname{tg} \alpha)v_i = H_3 \quad (14)$$

式中  $H_{1\pm}$ 、 $H_2$ 、 $H_3$  是流动参数及其对  $\zeta$ 、 $\eta$  导数的函数<sup>[1]</sup>。用特征差分格式数值解方程(11)、沿  $\lambda_+$  的相容性方程(12)和方程(13)、(14), 可解得上壁面点的参数。用特征差分格式数值解方程(11)、沿  $\lambda_-$  的相容性方程(12)和方程(13)、(14), 可解得下壁面点的参数。

### 3.3 对称轴边界

$\eta = 0$  的部分边界是对称轴边界。对称轴是流线, 其物理边界条件为:

$$v_{i,1} = 0 \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{i,1} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,1} = 0 \quad (16)$$

在对称轴下方补充一层虚拟结点  $(i, -1)$ , 利用式(15)可得:

$$v_{i,-1} = -v_{i,2}$$

利用式(16), 可得

$$u_{i,-1} = u_{i,2}; \quad \rho_{i,-1} = \rho_{i,2}; \quad p_{i,-1} = p_{i,2}$$

这样，轴上点可按内部点的差分格式来计算。但轴上点有  $\frac{v}{y} = \frac{0}{0}$  不定式问题，控制方程必须经洛必塔法则处理后才能用于轴上点参数的求解。

### 3.4 出口边界

出口边界处于超声速区，边界上的计算误差不能往上传播。因此，出口边界上的参数用三点外插计算：

$$U_{i_{\max},j} = U_{i_{\max}-3,j} + 3(U_{i_{\max}-1,j} - U_{i_{\max}-2,j})$$

## 4 数值计算及计算结果

数值计算中遇到的困难是边界复杂和低马赫数流域数值解难于收敛。在边界点参数计算中，对边界上的特殊点，例如潜入喷管入口段的顶点  $C$ 、点火器壁面与轴线的交点  $D$  等要作特殊处理。例如把点  $C$  取为网格结点，且在点  $C$  有  $u=0$ 。为了使数值解收敛，在低马赫数区采用了加权滤波技术，其公式为：

$$U_{i,j} = k_1 U_{i,j} + k_2 (U_{i+1,j} + U_{i-1,j})$$

或 
$$U_{i,j} = k_1 U_{i,j} + k_2 (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1})$$

式中  $k_1 = 0.3 \sim 0.8$ ;  $k_2 = (1 - k_1)/2$ ;  $k_3 = (1 - k_1)/4$

图 2 示出了喷管几何喉部壁上点、轴上点马赫数在数值积分中随积分步数的变化。由图可见，随着数值积分步数的增加，马赫数逐渐趋于收敛。

图 3 示出了下壁面和轴线 ( $\eta=0$  边界) 及上壁面 ( $\eta=\eta_M$  边界) 上的马赫数分布。图 4 示出了流域内的等马赫线分布。由两图可见，在燃烧室 (包括喷管背壁区域) 中气流的马赫数很低，气流进入喷管后马赫数迅速增加，喷管壁上和轴线上的马赫数分布曲线与单纯喷管计算的马赫数分布类似，但喷管中的等马赫线形状与单纯喷管计算的形状不同<sup>[2,3]</sup>。这说明了燃烧室—喷管一体化计算是很有意义的。

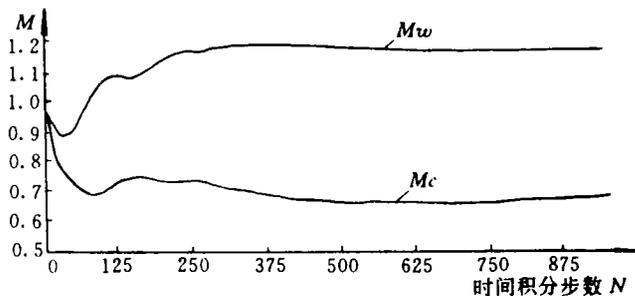


图 2 喷喉壁上点和轴上点马赫数随数值积分步数的变化

为了比较喷管喉部壁曲率半径对流场的影响，计算了  $\rho_i/r_i$  分别为 0.625 和 2 的两种情况 (其中  $\rho_i$  是喷喉壁曲率半径， $r_i$  是喷喉半径)。图 5 示出了这两种情况气流马赫数在上边界 ( $\eta=\eta_M$ ) 和下边界 ( $\eta=0$ ) 上的分布。由图可见，曲率半径变化，对燃烧室中的马赫数分布影响很小，而对喉部及其下游的马赫数有较大的影响。对于较大喷喉曲率半径喷管，其喉部及下游的马赫数较低。这与纯喷管计算所得到的趋势相同。

图 6 示出了两种网格尺寸对马赫数分布的影响。由图可见，网格尺寸不同，对燃烧室中气流的马赫数有些影响，但对喷管中的马赫数分布影响不大。

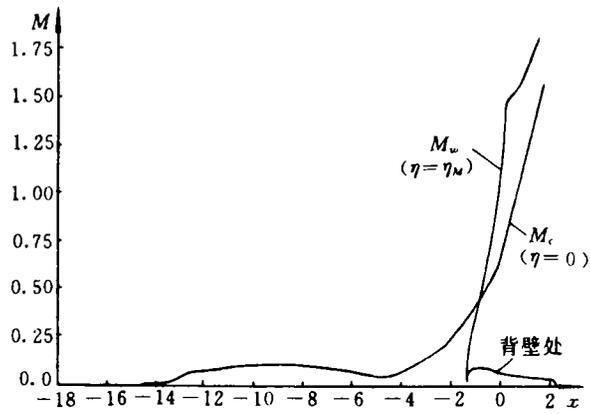


图3  $\eta=0$  和  $\eta=\eta_M$  边界上马赫数分布

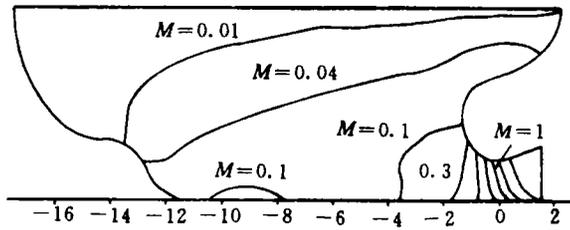


图4 等马赫线分布

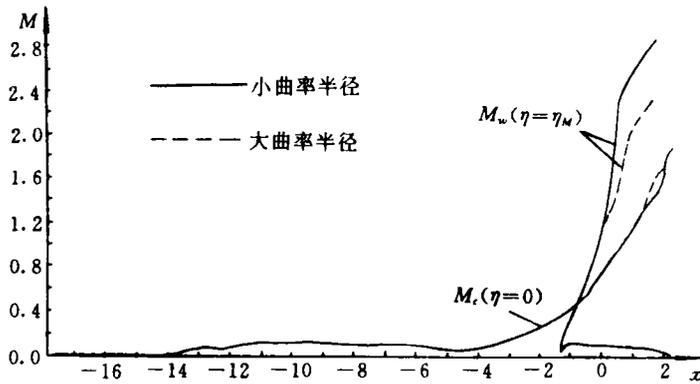


图5 喷喉曲率半径对马赫数分布的影响

## 5 结论

(1) 为了精确预估发动机性能,进行燃烧室—喷管一体化计算是必要的。它比单纯喷管计算所得到的结果合理。

(2) 本文提出的计算方法是收敛和稳定的,可用于燃烧室—喷管流场的精确计算。

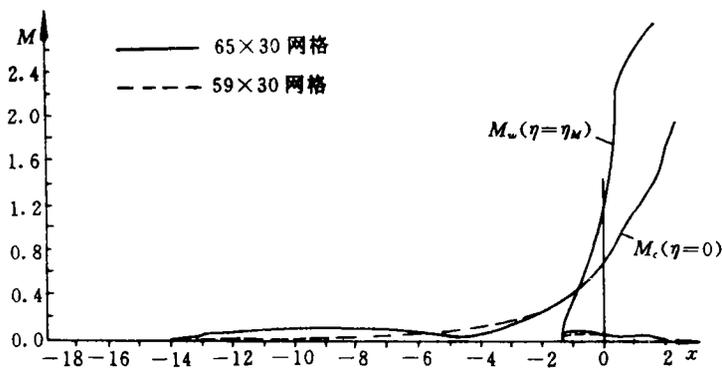


图6 网格粗细对马赫分布的影响

## 参 考 文 献

- 1 方丁酉. 两相流动力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988
- 2 Chang I Shih. One-and Two-phase Nozzle Flow. AD-A085806, 1980
- 3 方丁酉. 用时间相关法计算喷管跨声速流场. 空气动力学学报, 1985, (2)

## Numerical Computation of Chamber-Nozzle Flowfield

Zhou Chuanhui Fang Dingyou

(Department of Astronautic Technology, NUDT, Chansha, 410073)

### Abstract

The chamber-nozzle subsonic-transonic flowfield of solid rocket motor is computed by time-dependent method. The governing equations are numerically solved by MacCormack explicit scheme. The parameters of boundary points are calculated with physical boundary conditions and characteristic equations on the reference plane. It is shown that the numerical integral steps that have got to convergence for chamber-nozzle flowfield computation are much more than those for transonic nozzle flowfield calculation. Although the Mach number distribution along the wall and axis for chamber-nozzle flowfield is similar to that for transonic nozzle flowfield, the iso-Mach number line distribution doesn't agree with the transonic nozzle flowfield.

**Key words** numerical computation of flowfield, performance calculation of solid rocket motor