

van der Pol 振子在负反馈作用下的动力性态分析*

孙 丕 忠

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘 要 本文从非线性振动理论和反馈控制论的角度研究了 van der Pol 振子在负反馈作用下的动力性态, 用中心流形法和形式级数法分析了 van der Pol 振子的局部稳定性和 Hopf 分叉行为, 用 Runge-Kutta 法给出了仿真结果。

关键词 非线性, 负反馈, 动力性态

分类号 O322

在非线性振动研究领域, 振动系统的主动控制越来越受到人们的重视。由于非线性振子的运动状态与初始条件和系统参数有关, 其动力行为十分复杂, 而控制系统要达到可控的目的, 对其进行运动稳定性分析又是一件必不可少的工作。因此, 研究非线性振子在控制系统作用下的动力性态将具有十分重要的意义。本文将研究 van der Pol 振子在 PID (比例-积分-微分) 控制器作用下的动力性态。

van der Pol 方程^[1]是荷兰物理学家 van der Pol 在研究电子管振荡电路时提出的一个著名方程, 其形式为:

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

它是一个典型的非线性振子。对小的 ϵ , 人们已用解析法求出了其近似解析解。文[2]研究了参数激励下广义 van der pol 振子的分叉行为以及 Mathieu-van der Pol 方程和 van der Pol-Duffing 振子的随机振动与分叉行为。然而, 研究其在负反馈作用下的动力性态至今尚未见报导。

虽然自本世纪 60 年代以来, 现代控制理论得到了很大发展, 但经典反馈控制论提出的 PID 控制器在工程应用中仍占很大比重。其原因不仅在于这种控制器结构简单, 物理意义明显, 调整方便, 而且这种控制器稳定性较好, 可靠性高, 具有较强的鲁棒性。

1 问题描述

闭环控制系统如图 1 所示。记系统误差信号为 $e(t) = x_{r(t)} - x(t)$, 其中 $x_{r(t)}$ 为参考输入信号。PID 调节律的一般形式为

* 1993年3月1日收稿 1993年6月1日修改

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \frac{de(t)}{dt} + k_i \int_0^t e(t) dt \quad (2)$$

式中 k_p 、 k_d 、 k_i 分别为比例、微分、积分系数。进一步可将(2)式化为

$$u(t) = r(t) - (k_p x + k_d \dot{x} + k_i \int_0^t x dt) \quad (3)$$

式中 $r(t) = (k_p x_r + k_d \dot{x}_r + k_i \int_0^t x_r dt)$ 表征参考输入信号。(3)式与(1)式联立得

$$\ddot{x} + bx + a\dot{x} + \epsilon x^2 \dot{x} = r(t) - ky \quad (4)$$

其中 $b = 1 + k_p$, $a = k_d - \epsilon$, $k = k_i$, $y = \int_0^t x dt$ 。令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, 并置 $r(t) = 0$, 将(4)式化为状态空间描述形式即得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 - kx_3 - \epsilon x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 \end{cases} \quad (5)$$

问题化为分析 $\dot{X} = F(x)$ 确定的动力系统的定性行为。

2 局部稳定性分析

(5)式描述的系统具有唯一的不动点 $X_b = (0, 0, 0)^T$, (5)式的线性化近似系统为

$$\dot{X} = DF_{(0)} X \quad (6)$$

其中

$$DF_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b & -a & -k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6)式对应的特征方程为

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \quad (7)$$

负反馈保证了 $k_p > 0$, $k_d > 0$, $k_i > 0$ 。

当 $a = k_d - \epsilon < 0$ 时, 由 Routh-Hurwitz 判据知平衡点为不稳定平衡点。

当 $a = k_d - \epsilon > 0$ 时, 此时有 $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$ 。据非线性动力学理论和 Routh-Hurwitz 判据可得如下结论:

记 $\mu = ab - k$ 。

- (1) 当 $\mu > 0$ 时, 平衡点是渐近稳定平衡点;
- (2) 当 $\mu < 0$ 时, 平衡点是不稳定平衡点;
- (3) 当 $\mu = 0$ 时, 特征方程(7)的三个特征根分别为

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{b}, \lambda_3 = -k/b$$

此时, $X_b = (0, 0, 0)^T$ 是线性近似系统(6)的中心, 闭环系统(5)发生 Hopf 分叉。下面用中心流形法^[3]进行降维分析。

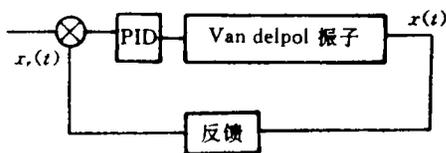


图 1

作可逆变换 $X=TY$, 其中

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{b} & -k/b \\ -b & 0 & k^2/b^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3)^T$$

并记 $\Delta = |T| = (k^2 + b^3)/b \sqrt{b}$, (5)式化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sqrt{b} y_2 + \frac{\sqrt{b}}{\Delta} \varepsilon (\sqrt{b} y_2 - a y_3)^2 (a^2 y_3 - b y_1) & (8a) \\ \dot{y}_2 = -\sqrt{b} y_1 - \frac{k}{\Delta b} \varepsilon (\sqrt{b} y_2 - a y_3)^2 (a^2 y_3 - b y_1) & (8b) \\ \dot{y}_3 = -a y_3 - \frac{\sqrt{b}}{\Delta} \varepsilon (\sqrt{b} y_2 - a y_3)^2 (a^2 y_3 - b y_1) & (8c) \end{cases}$$

中心流形 $y_3 = h(y_1, y_2)$ 过原点且与 $y_3 = 0$ 平面相切。在中心流形上可得下列定性等价方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - \omega_1^2 \varepsilon y_2^2 y_1 + (\text{高于三次的项}) \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \omega_2^2 \varepsilon y_1 y_2^2 + (\text{高于三次的项}) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 > 0$. 现用形式级数法^[4]来研究该蜕化系统。

设 $F(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + \sum_{i=3}^{\infty} F_i(y_1, y_2)$, $F_i(y_1, y_2)$ 为 y_1, y_2 的 i 次齐次多项式。在

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} \dot{y}_2$$

中令三次项为零, 可得 $F_3(y_1, y_2) = 0$;

令四次项为零后并引入 $y_1 = \gamma \cos \theta, y_2 = \gamma \sin \theta$ 得

$$\frac{dF_4(\cos \theta, \sin \theta)}{d\theta} = 2\varepsilon (\omega_1^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \omega_2^2 \cos \theta \sin^3 \theta)$$

由于 $\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta = 0, \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta > 0$, 故取 $C_4 = -\frac{\varepsilon \omega_1^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$, 即对蜕化系统(9)可选取 $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + F_4(y_1, y_2)$ 。

$V(y_1, y_2)$ 在 $(0, 0)$ 的一个邻域内连续、可微、正定, 且

$$\frac{dV}{dt} = C_4 (y_1^2 + y_2^2)^2 + (y_1, y_2 \text{ 的方次高于 } 4 \text{ 的项})$$

因为 $C_4 < 0$, 故平衡点是渐近稳定焦点。

3 数值仿真

为了证实以上理论分析, 进行了一系列数值仿真。数值仿真中采用四阶 Runge-Kutta 方法, 步长取 0.01。

图 2 为 $\mu = 0$ 时, 系统仿真示意图。图 3(a)、3(b) 分别为 $\mu > 0$ 时, $\varepsilon = 1.0$ 和 $\varepsilon = 10.0$ 情况下系统仿真示意图。图 4 为 $\mu < 0$ 时系统示意图。从图中可以看出, 理论分析正确,

而且 ϵ 的变化不影响控制效果。

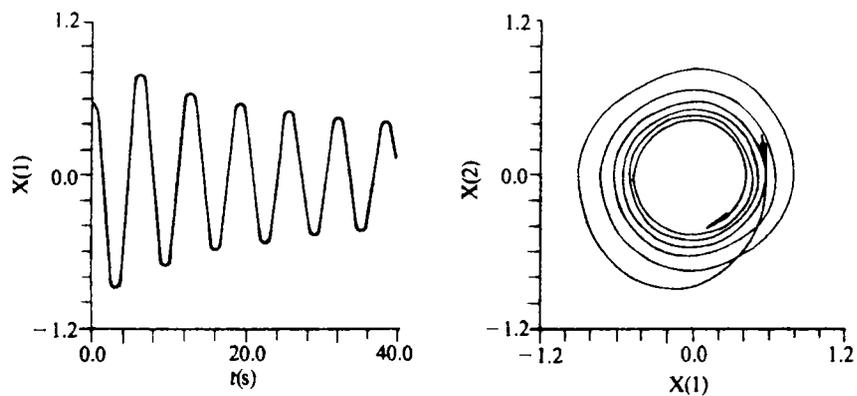


图 2

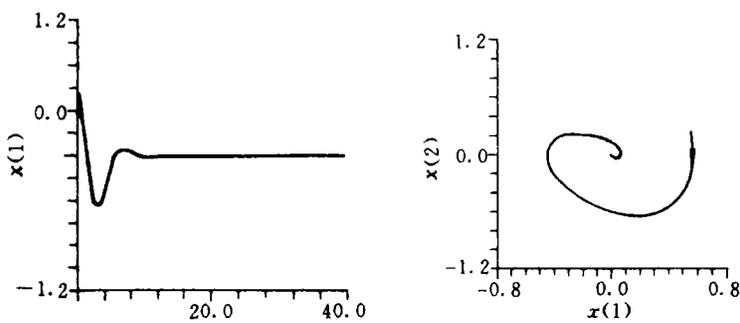


图 3(a)

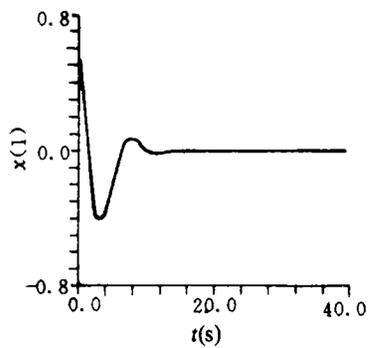


图 3(b)

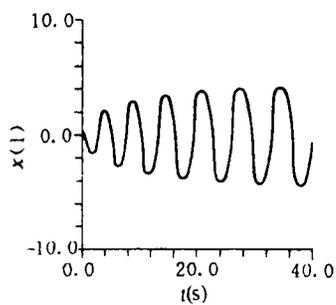


图 4

4 结束语

对于单纯的 van der Pol 振子, 当 $\epsilon < 2$ 时, 其平衡点是不稳定焦点; 当 $\epsilon > 2$ 时, 平衡点是不稳定结点。该系统的静止状态是不稳定的。系统任意小的扰动都将导致一个稳态的周期运动。该运动的振幅与初始条件无关。系统对平衡位置的偶然小的偏离也是不可避免的。因此, 系统总激发出一个稳态的自激振动。在 PID 控制律作用下的 van der Pol 振子, 只要适当选取控制器增益系数, 系统的平衡位置保持稳定。这就达到了控制其稳定平衡状态的目的。本文将非线性振子与控制器结合起来研究, 主要目的是: 为综合设计非线性振动系统的主动控制器提供一些有益的思路和方法。

参 考 文 献

- 1 王海期. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 1992
- 2 陈予恕等. 非线性振动、分叉及混沌. 天津: 天津大学出版社, 1992
- 3 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989
- 4 张锦炎. 常微分方程几何理论与分叉问题. 北京: 北京大学出版社, 1987

The Dynamical Behaviour Analysis of the van Der Pol Oscillator with the Negative Feedback

Sun Pizhong

(Department of Astronautic Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

In this paper, the dynamical behaviour of the van der Pol oscillator with the negative feedback is studied based on the nonlinear dynamics and the feedback control theory. The local stability and Hopf bifurcation behaviour are analysed by the center-manifold method and formal-Series method. The calculation results are brought about by Runge-Kutta method.

Key words nonlinearity, negative feedback, dynamical behaviour