国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第1期 1994年3月 Vol. 16 No. 1

复 Banach 空间的凸性及 H_p 鞅*

李 兵

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文系统地讨论了复 Banach 空间的各种凸性，以及取值于复 Banach 空间的 Hp 鞅，得到了关于凸性及 Hp 鞅之间的各种等价性命题。

关键词 局部 PL 凸，p 一致 PL 凸，Hp 鞅

分类号 O186.14

在 Banach 空间几何学中，一致凸性和一致光滑性是个很重要的概念，它们与取值于 Banach 空间的鞅的联系十分密切，如 Enflo[1]、Pisier[2]在这方面就作了许多开创性的工作。近年来 Davis[3]等人在复 Banach 空间的凸性方面取得了进一步的结果，与实 Banach 空间相比较难度更大些。它一般需要调和分析等方面的工具。本文对这方面的问题作进一步的研究。

首先给出几个定义。

定义 1 称连续拟范空间(E, ‖·‖)为局部 PL 凸空间，若 $\forall\ x,\ y\in E$, $\exists\ \delta=\delta\ (x,y)>0$，使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+re^{i\theta}y\|\,d\theta\geqslant\|x\|$$

对一切 $0\leqslant r\leqslant\delta$ 成立。

记 $H_p^E(\varepsilon)=\inf\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+e^{i\theta}y\|^p d\theta\right)^{1/p}-1;\ \|x\|=1,\ \|y\|=\varepsilon\right\}$

其中 $0<p<\infty$，$\varepsilon\geqslant0$

定义 2 称连续拟范空间(E, ‖·‖)为一致 PL 凸空间，若 $H_1^E(\varepsilon)>0$，$\forall\ \varepsilon>0$.

定义 3 若 $0<p<\infty$，$2\leqslant r<\infty$，称连续拟范空间(E, ‖·‖)为 r 一致 PL 凸空间，若$\exists\ \lambda>0$，使得

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+e^{i\theta}y\|^p d\theta\right)^{1/p}\geqslant(\|x\|^r+\lambda\|y\|^r)^{1/r}$$

对所有的 x，$y\in E$ 成立，记上式最大可能的 λ 值为 $I_{r,p}(E)$.

下面给出几个定理。

* 1993年4月20日收稿

定理 1 设 $0<p\leqslant r$，$(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ 为 r 一致 PL 凸空间，$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为任一给定的概率空间，记 $L_p(E)=\{x|x:\Omega\to E,\int_\Omega\|x(\omega)\|^p d\mu<\infty\}$，则 $(L_p(E),\|\cdot\|_{L_p(E)})$ 亦为 r 一致 PL 凸空间，且 $I_{r,p}(L_p(E))$，$=I_{r,p}(E)$. 这里 $\|x\|_{L_p(E)}\triangleq(\int_\Omega\|x(\omega)\|^p d\mu)^{1/p}$.

证明 $\forall\ x,y\in L_p(E)$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+e^{i\theta}y\|_{L_p(E)}^p d\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega\|x(\omega)+e^{i\theta}y(\omega)\|_E^p d\mu(\omega)\mathrm{d}\theta\\
&\geqslant\int_\Omega(\|x(\omega)\|_E^r+I_{r,p}(E)\|y(\omega)\|_E^r)^{p/r}\mathrm{d}\mu(\omega)\\
&\geqslant[(\int_\Omega\|x(\omega)\|_E^p\mathrm{d}\mu(\omega))^{r/p}+I_{r,p}(E)(\int_\Omega\|y(\omega)\|_E^p\mathrm{d}\mu(\omega))^{r/p}]^{p/r}\\
&=(\|x\|_{L_p(E)}^r+I_{r,p}(E)\|y\|_{L_p(E)}^r)^{p/r}
\end{aligned}
$$

这表明 $I_{r,p}(L_p(E))\geqslant I_{r,p}(E)$. 反之亦然。

定义 4 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$(\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$ 为 $\mathscr{F}$ 的单调非降子 σ 代数族，$(\eta_n,n\geqslant1)$ 为满足下列条件的 Ω 上复随机变量列：

(1) 每个 η_n 一致分布在 $T\triangleq\{z\in C:|z|=1\}$ 上；

(2) 每个 η_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的；

(3) 每个 η_n 是独立于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 的。

再设 $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ 为复 Banach 空间，$1\leqslant p<\infty$，及 $0<N\leqslant\infty$，并令 $(V_n,0<n\leqslant N)$ 为满足下列条件的 E 值随机变量列：

(4) $V_n\in L_p(E)$，$\forall\ 0<n\leqslant N$；

(5) 每个 V_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的；

(6) $\mathrm{E}(V_n|\mathscr{F}_{n-1},\eta_n)=\mathrm{E}((V_n|\mathscr{F}_{n-1})$，$\forall\ 0<n\leqslant N$.

定义 $x_0=d_0=V_0$，$d_n=V_n\eta_n$，$x_n=\sum\limits_{j=0}^n d_j$ $(n>0)$，称 $x=(x_n,\mathscr{F}_n,0\leqslant n\leqslant N)$ 为 E 值 Hp 鞅。

若 $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ 为拟范空间或 $0<p<1$，将(5)、(6)改为：

(5′) V_0 为常数，(6′) V_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的，$n>0$. 在此替换条件下定义的 $x=(x_n,\mathscr{F}_n,0\leqslant n\leqslant N)$，称为 H_p shrub.

定理 2 设 $2\leqslant q<\infty$，$0<p\leqslant q$，$(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ 为 q 一致 PL 凸空间，有：

(1) 若 $p\geqslant1$，(X_n) 为 E 值 H_p 鞅，则

$$\sup_n\|x_n\|_{L_p(E)}\geqslant\left[I_{q,p}(E)\sum_{n=0}^\infty\|E(V_{n+1}|\mathscr{F}_n)\|_{L_p(E)}^q\right]^{1/q}$$

(2) 若 (x_n) 为 E 值 H_p shrub，则

$$\sup_n\|x_n\|_{L_p(E)}\geqslant\left[I_{q,p}(E)\sum_{n=0}^\infty\|V_n\|_{L_p(E)}^q\right]^{1/q}$$

证明 (1) 由 H_p 鞅定义，有

$$E(x_{n+1}|\mathscr{F}_n,\eta_{n+1}) = x_n + \eta_{n+1}E(V_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

再由 Jensen 不等式以及定理 1 易得：

$$\| x_{n+1} \|^q_{L_p(E)} \geqslant [\| x_n \|^q_{L_p(E)} + I_{q,p}(E) \| E(V_{n+1}|\mathscr{F}_n) \|^q_{L_p(E)}]^{p/q}$$

递推即得（1）.

（2）证明类似于（1）.

定理 3[3] 设 $2\leqslant p<\infty$，$(E,\| \cdot \|)$为局部 PL 凸空间，若存在 $\alpha>0$，使得

$$\left(\alpha\sum_{n=0}^{\infty} \| V_n \|^p_{L_p(E)}\right)^{1/p} \leqslant \sup_n \| x_n \|_{L_p(E)}$$

对所有满足$\sup\limits_n \| x_n \|_{L_p(E)}<\infty$的 E 值 H_p shrub $x=(x_n)$成立，则对每个 $0<\beta<\alpha$，存在 E 上等价连续拟范 ξ，使（E，ξ）为 p 一致 PH 凸，且 $I_{p,p}$（E）$\geqslant\beta$.

定理 4 设 $2\leqslant p<\infty$，$(E\| \cdot \|)$为 p 一致 PL 凸空间，则存在 $C>0$，使得对于任何 E 值 shrub $x=(x_n)$，有

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \| V_n \|^p\right)^{1/p} \leqslant C \| x^* \|_{L_p(E)}$$

其中 $x^* \triangleq \sup\limits_n \| x_n \|$.

证明 记 $S^{(p)}(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| V_n \|^p\right)^{1/p}$，对于 E 值 shrub $x=(x_n)$，作如下分解：$x=x'+x''$，其中 $x'=(x'_n)$，$x''=(x''_n)$定义如下：

$$\Delta x'_n = V_nI(\| V_n \| \leqslant 2^{1/p}V_{n-1})\eta_n,\quad \Delta x''_n = V_nI(\| V_n \| > 2^{1/p}V^*_{n-1})\eta_n$$

再定义：

$$V'_n = V_nI(\| V_n \| \leqslant 2^{1/p}V^*_{n-1}),\ \eta'_n = \eta_n$$
$$V''_n = V_nI(\| V_n \| > 2^{1/p}V^*_{n-1}),\ \eta''_n = \eta_n$$

则 $x'=x'_n$，$x''=x''_n$ 仍为 E 值 shrub，且有

$$\| \Delta x'_n \| \leqslant 2^{1/p}V^*_{n-1} \tag{4.1}$$

由于 $\| V_n \|^pI(\| V_n \|>2^{1/p}V^*_{n-1}) \leqslant [2\| V_n \|^p-2(V^*_{n-1})^p]\cdot I(\| V_n \|>2^{1/p}V^*_{n-1}) \leqslant 2(V^*_n)^p-2(V^*_{n-1})^p$，故

$$\sum E\| V''_n \|^p \leqslant 2\sum E[(V^*_n)^p - (V^*_{n-1})^p] = 2E(V^*)^p \tag{4.2}$$

从而

$$E(S^{(p)}(x'')) \leqslant 2^{1/p} \| V^* \|_{L_p(E)} \tag{4.3}$$

现考虑 $S^{(p)}(x')$，首先利用(4.1)，有

$$\| x'_n \| \leqslant \| x'_{n-1} \| + \| \Delta x'_n \| \leqslant x'^*_{n-1} + 2^{1/p}V^*_{n-1} \triangleq \rho_{n-1} \tag{4.4}$$

定义 $\tau\triangleq\inf\{n:\rho_n>\lambda\}$，$(\lambda>0)$，$\inf\phi\triangleq\infty$，则 τ 为一停时，从而 $x'^{(\tau)}\triangleq(x'_{\tau\wedge n})$ 仍为 E 值 H_p shrub，事实上，

$$\begin{aligned} x'_{\tau\wedge n} &= \sum_{k=0}^{n} x'_kI_{\{\tau=k\}} + x'_nI_{\{\tau>n\}} \\ &= \sum_{j=0}^{n} I_{\{\tau\geqslant j\}}d'_j \\ &= \sum_{j=0}^{n} I_{\{\tau\geqslant j\}}V'_j\eta'_j \end{aligned}$$

故只需令：$V_j'^{(\tau)}=I_{\{\tau\geqslant j\}}V_j'$，$\eta_j'^{(\tau)}=\eta_j'$，即可知 $x'^{(\tau)}$仍为 E 值 shrub.

因(E，‖·‖)是 p 一致 PL 凸空间，由定理 2(2)知：∃ $C>0$，使得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|V_n'^{(\tau)}\|_{\ell_p(E)}\right)^{1/p}\leqslant C\sup_n\|x'_{\tau\wedge n}\|_{L_p(E)}$$

即
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|V_n'I_{\{\tau\geqslant n\}}\|_{\ell_p(E)}\right)^{1/p}\leqslant C\sup_n\|x'_{\tau\wedge n}\|_{L_p(E)} \tag{4.5}$$

另外
$$P(S^{(p)}(x')>\lambda)\leqslant p(\tau<\infty)+P(S^{(p)}(x'^{(\tau)})>\lambda) \tag{4.6}$$

由(4.4)知：

$$P(\tau<\infty)=P(\rho^*>\lambda)\leqslant P\left(x'^*\geqslant\frac{\lambda}{2}\right)+P\left(2^{1/p}V^*\geqslant\frac{\lambda}{2}\right) \tag{4.7}$$

另由 Chebyshev 不等式及(4.5)，有

$$\begin{aligned}P(S^{(p)}(x'^{(\tau)})>\lambda)&=P\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|V_n'I_{\{\tau\geqslant n\}}\|^p\right)^{1/p}>\lambda\right)\\&\leqslant\lambda^{-p}E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|V_n'I_{\{\tau\geqslant n\}}\|^p\right)\leqslant C\lambda^{-p}(\sup\|x'_{\tau\wedge n}\|_{l_p(E)})^p\end{aligned} \tag{4.8}$$

(注意此处及以后字母 C 允许代表不同常数。)

因 ρ_n 是递增的，所以

$\tau=\infty$时，$\|x'_{\tau\wedge n}\|=\|x'_n\|$

$\tau<\infty$时，$\|x'_{\tau\wedge n}\|\leqslant\rho_{\tau\wedge n-1}\leqslant\rho_{\tau-1}\leqslant\lambda$

而 $\{\tau=\infty\}\subset\{^*\rho\leqslant\lambda\}\subset\{x'^*\leqslant\lambda\}$，所以

$$\begin{aligned}\sup\mathrm{E}\|x'_{\tau\wedge n}\|^p&\leqslant\sup\mathrm{E}(\|x'_n\|I_{\{\tau=\infty\}}+\lambda I_{\{\tau<\infty\}})^p\\&\leqslant 2^{p-1}\{\mathrm{E}[(x'^*)^pI_{\{\tau=\infty\}}]+\lambda^pP(\tau<\infty)\end{aligned}$$

再由(4.8)知：

$$P(S^{(p)}(x'^{(\tau)})>\lambda)\leqslant C\lambda^{-p}\{\mathrm{E}[(x'^*)^pI_{\{\tau=\infty\}}]+\lambda^pP(\tau<\infty)\} \tag{4.9}$$

最后由(4.6)及(4.9)，并注意 $2\leqslant p<\infty$，有

$$\mathrm{E}S^{(p)}(x')\leqslant C\mathrm{E}x'^*+C\mathrm{E}V^* \tag{4.10}$$

再由 $x=x'+x''$及(4.2)有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}x'^*&\leqslant\mathrm{E}x^*+\mathrm{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|\Delta x_n''\|\right)\\&\leqslant\mathrm{E}x^*+2^{p-1/p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}\|\Delta x_n''\|^p\right)^{1/p}\\&\leqslant\mathrm{E}x^*+C[\mathrm{E}(V^*)^p]^{1/p}\end{aligned}$$

由此及(4.10)便得，

$$\mathrm{E}S^{(p)}(x'\leqslant\mathrm{E}x^*+C[\mathrm{E}(V^*)^p]^{1/p} \tag{4.11}$$

结合(4.3)及(4.11)，有

$$\mathrm{E}S^{(p)}(x)\leqslant C(\mathrm{E}(x^*)^p)^{1/p}\triangleq C\|x^*\|_{l_p(E)}$$

此即
$$\mathrm{E}(\Sigma\|V_n\|^p)^{1/p}\leqslant C\|x^*\|_{\ell_p(E)}$$ (证毕)

我们称函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$为限制增长的 Young 函数。若 Φ 是单调增的凸函数，$\Phi(0)=0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\Phi(t)=\infty$，并存在常数 $C>0$，使得 $\Phi(2t)\leqslant C\Phi(t)$，$(t\geqslant0)$.

定理 5 设 $2\leqslant p<\infty$，$(E,\|\cdot\|)$为局部 PL 凸 Banach 空间，则以下命题等价：

(1) E 同构于 p 一致 PL 凸空间。

(2) 存在常数 $C_p>0$，使得对于任何 E 值 H_p shrub $x=(x_n)$，有

$$\lambda^p P(S^{(p)}(x)>\lambda)\leqslant C_p\|x\|^p_{L_p(E)} \tag{5.1}$$

其中 $S^{(p)}(x)\triangleq\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|V_n\|^p\right)^{1/p}$.

(3) 对于任意的限制增长的 Young 函数 Φ，存在常数 $C_\Phi>0$，使得对于任何 E 值 H_p shrub $x=(x_n)$，有

$$\|S^{(p)}(x)\|_\Phi\leqslant C_\Phi\|x^*\|_\Phi \tag{5.2}$$

其中 $\|\cdot\|_\Phi$ 为 Orlicz 空间范数，$x^*\triangleq\sup\limits_n\|x_n\|$.

证明 (1) ⇒ (2) 由定理 2 的 (2) 及 Chebyshev 不等式知

$$\lambda^p P(S^{(p)}(x)>\lambda)\leqslant\|S^{(p)}(x)\|^p_{L_p(E)}\leqslant C_p\|x\|^p_{L_p(E)}$$

(2) ⇒ (3) 对于任何 $\lambda>0$，$\delta>0$，取 $\beta^p>\delta^p+1$. 假定 W_n 是任何大于 $\|V_n\|$ 的 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测函数，定义停时：

$$\mu=\inf\{n:S_n^{(p)}(x)>\lambda\},\quad \nu=\inf\{n:S_n^{(p)}(x)>\beta\lambda\}$$
$$\sigma=\inf\{n:\|x_n\|>\delta\lambda\text{ 或 }W_{n+1}>\delta\lambda\} \tag{5.3}$$

记 $A_k=\{\mu<k\leqslant\nu\wedge\sigma\}$，$\mu_k=I(A_k)$，这里 I 表示性函数，则(μ_k)为实值可预报序列。令 $V'_n=\mu_n V_n,\eta'_n=\eta_n,x'_n=\sum_{k=1}^{n}V'_k n'_k$，则 $x'=(x'_n)$ 仍为 E 值 H_p shrub，当 $\omega\in\{v=n,\sigma=\infty\}$ 时，有

$$\begin{aligned}(S_n^{(p)}(x'))^p&=\sum_{k=1}^{n}\|\mu_k V_k\|^p\geqslant\sum_{k=1}^{n}\|\nu_k\|^p-\sum_{k=1}^{n-1}\|(1-\mu_k)V_k\|^p\\&\geqslant(\beta^p-\delta^p-1)\lambda^p\end{aligned}$$

故
$$\{\nu=n,\sigma=\infty\}\subset\{S^{(p)}(x')\geqslant(\beta^p-\delta^p-1)^{1/p}\lambda\} \tag{5.4}$$

从而
$$\{S^{(p)}(x)>\beta\lambda,\ x^*VW^*\leqslant\delta\lambda\}\subset\{S^{(p)}(x')\geqslant(\beta^p-\delta^p-1)^{1/p}\lambda\} \tag{5.5}$$

应用(5.1)于 E 值 H_p shrub $x'=(x'_n)$上，有

$$\begin{aligned}&P(S^{(p)}(x)>\beta\lambda,\ x^*VW^*\leqslant\delta\lambda)\\&\leqslant C_p(\beta^p-\delta^p-1)^{-1}\lambda^{-p}\|x'\|^p_{L_p(E)}\end{aligned} \tag{5.6}$$

由 $x'=(x'_n)$定义知：当 $\mu_n=1$，$\|x'_n\|\leqslant 3\delta\lambda$，从而

$$E\|x'_n\|^p\leqslant(3\delta\lambda)^p P(\mu<\infty)=(3\delta\lambda)^p P(S^{(p)}(x)>\lambda \tag{5.7}$$

综合(5.6)、(5.7)得：

$$P(S^{(p)}(x)>\beta\lambda,\ x^*VW^*\leqslant\delta\lambda)\leqslant\varepsilon P(S^{(p)}(x)>\lambda) \tag{5.8}$$

其中 $\varepsilon\triangleq C_p(3\delta)^p(\beta^p-\delta^p-1)^{-1}$为某个常数，再将 ε 中 δ 取得充分小，使得 $\beta^p\varepsilon<1$. 并应用 Burkholder[4]引理 7 得：

$$E\Phi(P(S^{(p)}(x)\leqslant CE\Phi(x^*VW^*) \tag{5.9}$$

现对 E 值 H_p shrub $x=(x_n)$作类似于定理 4 证明中所作的分解：$x=x'+x^*$，其中 $\Delta x'_n\triangleq V_nI(\|V_n\|\leqslant 2V^*_{n-1})\eta_n$，$\Delta x^*_n=V_nI(\|V_n\|\leqslant 2V^*_{n-1})\eta_n$. 这样便有

$$\| \Delta x_n^{*} \| \leqslant 2V_{n-1}^{*} \tag{5.10}$$

$$\Sigma \| \Delta x_n^{*} \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (2\| V_n \| - 2V_{n-1}^{*} \|) I(\| V_n \| > 2V_{n-1}^{*}) \leqslant 2V^{*} \tag{5.11}$$

取上面的 $W_n = 2V_{n-1}^{*}$，将(5.9)应用于 $x^{*} = (x_n^{*})$上，有

$$\mathrm{E}\Phi(S^{(p)}(x^{*})) \leqslant C\mathrm{E}\Phi(x^{*}V(2V^{*})) \leqslant C\mathrm{E}\Phi(4x^{*})$$

而对 $x^{*} = (x_n^{*})$，由 Garsia[5]不等式可得：

$$\mathrm{E}\Phi(S^{(p)}(x^{*})) \leqslant \mathrm{E}\Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \| \Delta x_n^{*} \|\Big) \leqslant \mathrm{E}\Phi(2V^{*}) \leqslant \mathrm{E}\Phi(4x^{*})$$

综合以上两式，并注意到 Φ 的限制增长性，有

$$\mathrm{E}\Phi(S^{(p)}(x)) \leqslant C'\mathrm{E}\Phi(x^{*}) \tag{5.12}$$

为了得到(5.2)，考虑 $\| x^{*} \|_{\Phi} = 1$ 情形，此时 $\mathrm{E}\Phi(x^{*}) \leqslant \| x^{*} \|_{\Phi}$，从而

$$\begin{aligned} \| S^{(p)}(x) \|_{\Phi} &\leqslant 1 + \mathrm{E}\Phi(S^{(p)}(x)) \leqslant 1 + C'\mathrm{E}\Phi(x^{*}) \\ &\leqslant \| x^{*} \|_{\Phi} + C' \| x^{*} \|_{\Phi} \leqslant C_{\Phi} \| x^{*} \|_{\Phi} \end{aligned} \tag{5.13}$$

对于 $\| x^{*} \|_{\Phi} < \infty$，易证同样的式子成立。

(3) ⇒ (1)　我们只需证明下面命题：若对于任何一致有界的 E 值 H_p shrub $x = (x_n)$，(即 $x^{*} \leqslant M < \infty$)，有 $S^{(p)}(x) < \infty$, a.e.，则 E 同构于一个 p 一致 PL 凸空间。这一命题包含在下面引理中。

引理 1　若 E 值 H_p shrub $x = (x_n)$满足 $\| x \|_{\mathfrak{L}_p(E)}^{p} < \infty$，以及 $P(S^{(p)}(x) = \infty) > 0$，$(1 < p < \infty)$，则存在另一个 E 值 H_p shrub $x' = (x_n')$，x'是一致有界的，且有

$$P(S^{(p)}(x') = \infty) \geqslant \frac{1}{2} P(S^{(p)}(x) = \infty)$$

证明　记 $A = \{S^{(p)}(x) = \infty\}$，因 $x' = (x_n')$为通常意义下的鞅，故 $\| x \| = (\| x_n \|)$为下鞅，从而由 Chebyshev 不等式以及 Doob 不等式，有

$$P(x^{*} > \lambda) \leqslant \lambda^{-p} \| x^{*} \|_{\mathfrak{L}_p(E)}^{p} \leqslant C\lambda^{-p} \| x \|_{\mathfrak{L}_p(E)}^{p}$$

选取 λ 使得 $P(x^{*} > \lambda) < \frac{1}{2} P(A)$，定义

$$A_k = \{ \| x_i \| \leqslant \lambda,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\ \| \Delta x_j \| \leqslant 2\lambda,\ 1 \leqslant j \leqslant k \}$$

$$\mu_k = I(A_k),\ x_n' = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \Delta x_k,\ x' = (x_n')$$

则由于(μ_k)为实值可预报序列，只要令 $V_k' = \mu_k \eta_k, \eta_k' = \eta_k$，就知 $x' = (x_n')$仍为 E 值 H_p shrub，且有 $\| x_n' \| \leqslant 3\lambda$. 另一方面

$$P(S^{(p)}(x') = \infty) \geqslant P(S^{(p)}(x') = S^{(p)}(x),\ S^{(p)}(x) = \infty)$$

$$P(S^{(p)}(x') \neq S^{(p)}(x), S^{(p)}(x) = \infty) \leqslant P(x^{*} > \lambda,\ S^{(p)}(x) = \infty) \leqslant \frac{1}{2} P(A)$$

所以

$$P(S^{(p)}(x') = \infty) \geqslant \frac{1}{2} P(A)$$

定理 6　设 $2 \leqslant p < \infty$，(E, $\| \cdot \|$)为局部 PL 凸 Banach 空间，则以下命题等价：

(1) E 同构于 p 一致 PL 凸空间。

(2) 对于任何 E 值 $H_p$shrub $x = (x_n)$，若 $x' = (x_n')$是 $x = (x_n)$关于 $u = (u_n)$的变换，即

$u=(u_n)$为实值可预报序列，$x_n' = \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i$，且 $\mathrm{E}(\Delta x^*)^p < \infty$，则

$$\{x^* < \infty,\ u^* < \infty\} \subset \{S^{(p)}(x') < \infty\} \qquad \text{a.e.} \qquad (6.1)$$

(3) 对于任何 E 值 H_p shrub $x=(x_n)$，若 $x'=(x_n')$ 是 $x=(x_n)$ 关于实值可预报序列 $u=(u_n)$ 变换，且 E $(\Delta x^*)^p < \infty$，则

$$\{x^* < \infty,\ u^* < \infty\} \subset \{B^{(p)}(x') < \infty\} \qquad \text{a.e.} \qquad (6.2)$$

其中 $B^{(p)}(x') \triangleq (\Sigma \mathrm{E}(\| V_k \|^p | \mathscr{F}_{k-1})^{1/p}$.

特别地，将(6.1)、(6.2)中的 $u^* < \infty$ 换为 $u^* \leqslant 1$，定理仍成立。

证明 (1) ⇒ (2) 首先设 $u^* \leqslant 1$ 对于每个 $a>0$，定义 $\tau_a \triangleq \inf\{n : \| x_n \| > a\}$，则 τ_a 为一停时，$x^{\tau_a}=(x_{\tau_a \wedge n})$，$x'^{\tau_a}=(x'_{\tau_a \wedge n})$仍为 E 值 H_p shrub，其证明见定理 4，注意

$$\| \Delta x'_{\tau_a \wedge n} \| = \| \Delta x_n' I_{(\tau_a \geqslant n)} \| \leqslant \| x_n I_{(\tau_a \geqslant n)} \| = \| \Delta x_{\tau_a \wedge n} \| \qquad (6.3)$$

并且有

$$\begin{aligned}
\| x_{\tau_a \wedge n} \| &= \| x_n \| I_{(\tau_a > n)} + \| x_n \| I_{(\tau_a \leqslant n)} \\
&\leqslant \| x_n \| I_{(\tau_a > n)} + (\| x_{\tau_a - 1} \| + \| \Delta x_{\tau_a} \|) I_{(\tau_a \leqslant n)} \\
&\leqslant a + (a + \Delta x^*) I_{(\tau_a \leqslant n)} \leqslant 2a + \Delta x^*
\end{aligned}$$

因 E 同构于 p 一致 PL 凸空间，故由定理 3，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S^{(p)}(x'^{\tau_a}))^p &\geqslant \mathrm{E}(S^{(p)}(x^{\tau_a}))^p \leqslant C_p \sup \mathrm{E} \| x_{\tau_a \wedge n} \|^p \\
&\leqslant C_p 2^{p-1}((2a)^p + \mathrm{E}(\Delta x^*)^p) < \infty \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

于是 $S^{(p)}(x'^{\tau_a}) < \infty$, a.e.，但在$\{\tau_a = \infty\} = \{x^* \leqslant a\}$上，$S^{(p)}(x'^{\tau_a}) = S^{(p)}(x')$，所以$\{x^* \leqslant a,\ u^* \leqslant 1\} \subset \{S^{(p)}(x') < \infty\}$，a.e.，而$\{x^* < \infty\} = \bigcup_{a>0} \{x^* \leqslant a\}$，故$\{x^* < \infty,\ u^* \leqslant 1\} \subset \{S^{(p)}(x') < \infty\}$，a.e.，对于一般的 $u=(u_n)$，定义 $u^{(k)}=(u_n^{(k)})$，$(k \geqslant 0)$如下：

$$u_n^{(k)} = \begin{cases} u_n & \text{若 } |u_n| \leqslant k, \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

则 $u^{(k)}$仍为实值可预报序列。若记 $x'^{(k)}$表示 x 关于 $u^{(k)}$的变换，则由上知：$\{x^* < \infty\} \subset \{S^{(p)}(x'^{(k)}) < \infty\}$，a.e.。但在$\{u^* \leqslant k\}$上，$u_n^{(k)} = u_n$，从而 $x_n'^{(k)} = x_n'$，所以$\{x^* < \infty,\ u^* < \infty\} \subset \{S^{(p)}(x') < \infty\}$，a.e.。

(2) ⇒ (1) 由定理 5 及引理 1 知：若 E 不同构于 p 一致 PL 凸空间，则存在某一致有界的 E 值 H_p shrub $x=(x_n)$满足：$P(S^{(p)}(x) = \infty) > 0$，注意 $x=(x_n)$满足(2)，则当 $x' = x$ 时，此与(2)矛盾。

(2) ⇔ (3) 当 $E(\Delta x^*)^p < \infty$时，若 $u^* \leqslant k$，则 $E(\Delta x'^*)^p < \infty$，此时$\{B^{(p)}(x') < \infty\} = \{S^{(p)}(x') < \infty\}$，a.e.，即 $\{x^* < \infty,\ u^* \leqslant k\} \subset \{B^{(p)}(x') < \infty\}$，a.e.，反过来从 $B^{(p)}(x')$到 $S^{(p)}(x')$的类似关系一样成立。对于一般的 u，用与上类似方法即可得到。

参 考 文 献

1 Enflo P. Israel J Math, 1972(13): 281～288

2 Pisier G. Israel J Math, 1975(20): 326～350

3 Davis W J, Garling D J H, Tomczak N. J Funct Anal, 1984(55): 110～150
4 Burkholder D L. Ann Prob, 1973(1): 19～42
5 Garsia A M. Ann Prob, 1973(1): 171～174

Convexity in Complex Banach Spaces and H_p Martingales

Li Bing
(Department of Systems Engineering and Maths, NUDT, Chansha, 410073)

Abstract

In this paper, we discuss the convexity in complex Banach spuces and H_p martingales. We have obtained many equivalent conditions between the convexity and H_p martingales in complex Banach spaces

Key words locally PL convex, p uniformly PL convex, Hp martingale