

Hill 方程在远距离拦截中的应用*

陈建祥

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘要 提出了一种通过坐标系移动,化原系中的大相对距离为新系中的小相对距离,以减小 Hill 方程在大相对距离时的模型误差的方法,即当拦截器的相对距离达到某一精度许可的值 ρ_1 时(定义 ρ_1 为精度控制参数,例如可取 $\rho_1=500\text{km}$),以拦截器位置为原点,建立一假想的动参考系,将拦截器在原动系中的相对运动参数转换为新系中的相对运动参数(显然在新系中的初始相对距离 $\vec{\rho}_{i0} = 0$),从而化大相对距离为小相对距离问题,提高 Hill 方程的描述精度。本文给出了方法的理论分析及两个计算机仿真实例,该法确可有效地减小 Hill 方程在大相对距离时的模型误差,结果是令人满意的。

关键词 Hill 方程;空间拦截;卫星轨道;相对运动

分类号 TJ861

随着现代航天技术的发展,航天器要完成多种机动飞行任务,如固定时间拦截目标。固定时间拦截问题可在惯性参照系中研究^[1](文献[1]中介绍了经典的 Herrick 方法,Godal 方法, Lambert 飞行时间定理等)。这一问题也可在适当选取的动参照系中研究,文[1]中给出了描述两航天器相对运动的 Hill 方程。

惯性系内研究是基于轨道动力学理论,对给定的拦截时间 Δt ,通过积分运动方程或迭代求解代数超越方程而得到精确解,它不能直接写出结果的解析解,因而不便于分析问题。动系中的 Hill 方程通过引力差的线性化而得到相对运动方程,其优点是易于求出近似解析解。但它只是在相对距离小时有高精度的解,当相对距离较大时(如 $\rho > 1000\text{km}$),则 Hill 方程有较大的模型误差,使解的精度降低。

在工程实际问题中,往往会遇到飞行器飞行时间较长(即大相对距离)的情况,如远距离拦截问题。在问题的初步研究中,希望能有像 Hill 方程这样简捷迅速的手段,但此时若仍简单地用 Hill 方程来解决问题,则其模型误差将使结果产生不能容忍的误差。

减小误差的关键,在于能否通过某种线性变换(一次或多次)使大相对距离转换为小相对距离问题。假设拦截器是从卫星上释放出去的,经 t_1 时间后其相对距离 $\rho = \rho_1$ (ρ_1 为精度控制参数,如 $\rho_1 = 500\text{km}$),此时在该点建立一假想的卫星轨道坐标系(动参考

* 1993年3月10日收稿

系), 则该时刻拦截器在此新系内的相对位置 $\vec{\rho}_0 = 0$ 。不管拦截距离多大, 总可以通过有限次这样的坐标系转换, 化大相对距离为有限次小相对距离, 使每次使用 Hill 方程时都能保证 $\rho < \rho_1$, 从而减小其模型误差。

1 Hill 方程

在距离平方反比引力场中, 卫星沿圆轨道 I 运动。取卫星轨道系 O-XYZ 为动坐标系。若航天器在卫星附近运动, 即圆轨道旁的小偏差运动, 在 t 时刻的地心距矢量为 \vec{r}_2 , 则相对于卫星的位置矢量 $\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, 其中 \vec{r}_1 为卫星的位置矢。如图 1 所示。若航天器与卫星都只受到距离平方反比中心力场的引力作用, 则有

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{\mu\vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{\mu\vec{r}_1}{r_1^3} = \mu \frac{\vec{r}_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \vec{r}_2}{r_1^3}$$

设 $\vec{\omega}$ 和 $\dot{\vec{\omega}}$ 分别为动坐标系旋转的角加速度和角速度, 可得矢量形式的相对运动方程为

$$\frac{\delta^2\vec{\rho}}{dt^2} + 2\left(\vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{\rho}}{dt}\right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} = \mu \frac{\vec{r}_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \vec{r}_2}{r_1^3}$$

设航天器在动系 O-XYZ 中的坐标为 $(X, Y, Z)^T$, 通过引力差线性化得到航天器的相对运动微分方程组为 (假设 $\rho \ll r_1$)

$$\begin{cases} \ddot{X} = 3n^2X + 2n\dot{Y} \\ \ddot{Y} = -2n\dot{X} \\ \ddot{Z} = -n^2Z \end{cases} \quad (1)$$

式中 n 为卫星轨道角速度, $n = |\dot{\vec{\omega}}| = \sqrt{\mu/r_1^3}$, $\mu = fM = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$

f 为引力常数, M 为地球质量。这一常系数线性微分方程组近似描述了两航天器的相对运动, 称为 Hill 方程。当相对距离 ρ 愈小, 描述愈精确。

令 $\vec{\rho} = (X, Y, Z)^T$; $\vec{V} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T$

积分(1)式得 τ 时刻航天器的相对运动参数为

$$\begin{pmatrix} \rho_\tau \\ V_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\rho\rho}(\tau) & \phi_{\rho v}(\tau) \\ \phi_{v\rho}(\tau) & \phi_{vv}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{(0)} \\ V_{(0)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 $\rho_{(0)}$, $V_{(0)}$ 为航天器在 $\tau=0$ 时刻的初始参数, $\phi_{\rho\rho}$, $\phi_{\rho v}$, $\phi_{v\rho}$, ϕ_{vv} 为相对运动的状态转移矩阵。

$$\phi_{\rho\rho}(\tau) = \begin{pmatrix} 4 - 3\cos n\tau & 0 & 0 \\ 6(\sin n\tau - n\tau) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\tau \end{pmatrix}$$

$$\phi_{\rho v}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\sin n\tau}{n} & \frac{2(1 - \cos n\tau)}{n} & 0 \\ -\frac{2(1 - \cos n\tau)}{n} & \frac{4\sin n\tau}{n} - 3\tau & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin n\tau}{n} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{\rho}(\tau) = \begin{pmatrix} 3n\sin n\tau & 0 & 0 \\ 6n(\cos n\tau - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n\sin n\tau \end{pmatrix}$$

$$\phi_{\omega}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos n\tau & 2\sin n\tau & 0 \\ -2\sin n\tau & 4\cos n\tau - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\tau \end{pmatrix}$$

Hill 方程通过引力差的线性化, 得到了解析解。从式(1)还可以看出相对运动具有下述特性: 即可分解为纵平面 (XOY) 和侧向 (Z 方向) 两个相互独立的运动。

2 坐标变换及相对参数的转换

为简化问题, 本文暂只研究平面问题, 即不考虑侧向 (Z 方向) 的运动, 书写上仍按三维向量形式书写 (Z 方向的值为零)。

设卫星在轨道 I 上作圆轨道运动, 在 $\tau=0$ 时刻释放一相对速度为 \vec{V}_0 的飞行器, $\tau=0$ 时刻动系为 O-XYZ, 卫星纬度为 u_0 。经 τ_1 时刻后 O-XYZ 随卫星飞至 O'-X'Y'Z' 位置, 此时飞行器相对位置矢为 $\vec{\rho}$, 且假定此时 $\rho=\rho_1$, 如图 2 所示。

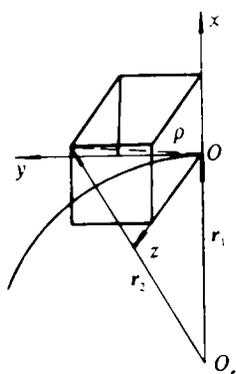


图 1 卫星轨道系

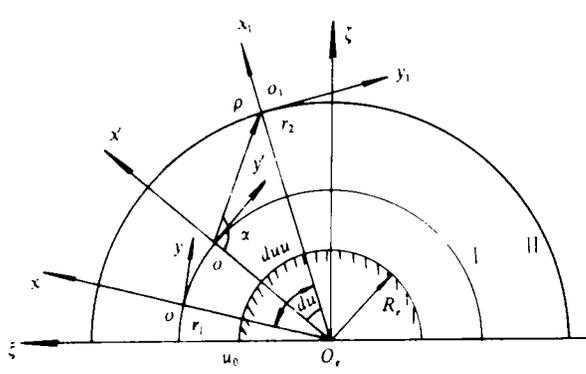


图 2 坐标系转换

在 O_1 建立假想的动参考系为 $O_1-X_1Y_1Z_1$, 易知

$$r_1 = Re + H$$

$$n_{S1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}}$$

$$\angle xO_eX' = n_{S1}\tau_1$$

$$r_2^2 = r_1^2 + \rho^2 - 2r_1\rho\cos\alpha$$

式中 Re 为地球半径, H 为卫星轨道高度。

记 τ_1 时刻飞行器在 $O'-X'Y'Z'$ 中的相对运动参数为 $\vec{\rho}$, \vec{V} , 则有

$$\vec{\rho}_{(\tau_1)} = \phi_{\rho}(\tau_1)\vec{V}_{(0)}; \quad \vec{V}_{(\tau_1)} = \phi_{\omega}(\tau_1)\vec{V}_0$$

设 $\vec{\rho}_{\tau_1}$ 在 $O'-X'Y'Z'$ 中的三个分量为 $\rho_{(1,1)}, \rho_{(2,1)}, \rho_{(3,1)}$, 则

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arctg[\rho_{(1,1)}/\rho_{(2,1)}]$$

$$du = \text{sign}[\rho_{(2,1)}] \arccos \frac{r_1^2 + r_2^2 - \rho^2}{2r_1 r_2}$$

$$duu = du + n_{s1}\tau_1$$

下面将飞行器在原系中的相对参数 $\vec{\rho}, \vec{V}$ 转换为新系中的相对参数 $\vec{\rho}_{1(o)}$ 与 $\vec{V}_{1(o)}$ 。显然 $\vec{\rho}_{1(o)} = 0$ ，而 $\vec{V}_{1(o)}$ 可如下求得。

取 $Oe-\xi\eta\zeta$ 为惯性系，由

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{r_1} + \vec{V}_{e_1} = \vec{V}_{r_2} + \vec{V}_{e_2}$$

得

$$\begin{aligned} & B_{(u_0+duu)} \begin{pmatrix} 0 \\ n_{s1}r_2 \\ 0 \end{pmatrix} + B_{(u_0+n_{s1}\tau_1)} \vec{V}_{r_1} \\ &= B_{(u_0+duu)} \begin{pmatrix} 0 \\ n_{s2}r_2 \\ 0 \end{pmatrix} + B_{(u_0+duu)} \vec{V}_{1(o)} \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} n_{s2} &= \sqrt{\mu/r_1^3} \\ B_{(du)} &= \begin{pmatrix} \cos du & -\sin du & 0 \\ \sin du & \cos du & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$B_{(du)}$ 为 $O'-X'Y'Z'$ 与 $O_1-X_1Y_1Z_1$ 之间的坐标转移矩阵。

由 (3) 式化简整理得

$$\vec{V}_{1(o)} = B_{(du)}^{-1} \vec{V}_{r_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ (n_{s1} - n_{s2})r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

此即相对速度在新系中的表达式。

3 两个应用实例

以卫星释放拦截器拦截中段自由飞行的弹道导弹为例。卫星轨道为极地圆轨道，轨道高度 $H=640\text{km}$ ，释放拦截器时刻 $\tau=0$ ，纬度 $u_0=50^\circ$ 。

导弹向正北发射，其中段起点运动参数为高度 $H_K=170\text{km}$ ，速度 $V_K=7390\text{m/s}$ ，当地速度倾角 $\Theta_K=20.6^\circ$ ，纬度 $\phi_K=90^\circ$ 。设拦截器冲量最大值为 6421m/s ，最长拦截时间为 1500s 。卫星轨道面与导弹发射面重合，进行同向追踪拦截，不计地球扁率，不考虑地球自转。文中提供三组仿真计算结果：第一组为直接由 Hill 方程计算（记为 H），第二组为惯性系内的计算结果（记为 HO）作为标准参数，第三组为本文提供的方法的计算结果（记为 HA），并绘制 H，HA 相对于 HO 的误差曲线。

例 1 给定拦截时间 $\tau=1500\text{s}$ ，用上述三种方法求拦截目标所需冲量式的速度增量

ΔV 。其中 HA 仿真程序中精度控制参数 $\rho_1=100\sim 2000\text{km}$ ，坐标系移动次数为 n (次)，结果如下：

$$HO: \Delta V = (-1506.77, 1022.12, 0)^T$$

$$H: \Delta V = (-1448.03, 1062.59, 0)^T$$

记 δV_1 为 H 的误差， $\delta V_1=71.33\text{m/s}$ ； δV_2 为 HA 的误差， $\delta V_1, \delta V_2 \sim \rho_1$ 及 $n \sim \rho_1$ 曲线如图 3、图 4 所示。

例 2 给定拦截冲量式速度增量为： $\Delta V = (-1000, 1000, 0)^T \text{ m/s}$ ，取 $\rho_1=200\text{km}$ ，求拦截器终点坐标 (的失误距离) 随时间 τ (即相对距离 ρ) 的变化曲线如图 5 (H, HA) 所示，HA 坐标移动次数 $n \sim \rho$ 曲线如图 6 所示。

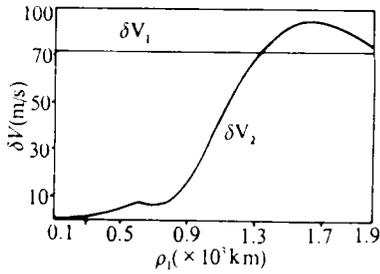


图 3 $\delta V \sim \rho_1$ 曲线图

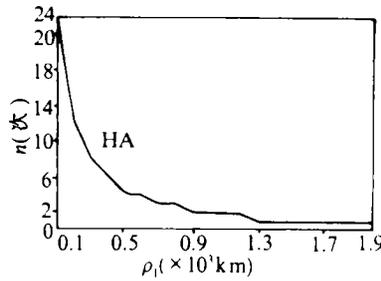


图 4 $n \sim \rho_1$ 曲线图

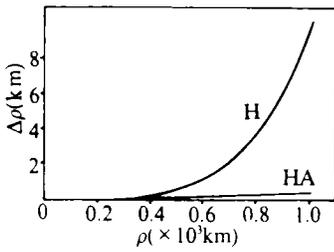


图 5 $\Delta \rho \sim \rho$ 曲线图

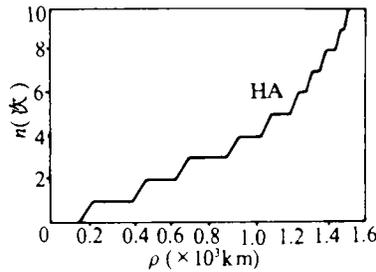


图 6 $n \sim \rho$ 曲线图

4 结论

(1) HA 能有效地减小 Hill 方程在大相对距离时的模型误差，提高其描述精度，从图 3、图 5 看，效果是令人满意的。

(2) HA 的精度控制参数 ρ_1 一般可取为 $100\sim 500\text{km}$ ，此时可保证 Hill 方程在大相对距离时有足够高的精度。

(3) HA 不必数值积分或迭代求解代数超越方程，只借助于 Hill 方程的解析解和有限次线性变换，且不需考虑拦截轨道的曲线类型，易于编程上机实现。

(4) HA 有一定的实际应用价值，可广泛应用于拦截目标，离轨机动，轨道转移，轨道交会等问题。

致谢: 本文的研究得到任萱教授的帮助, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- 1 任萱. 人造地球卫星轨道力学. 长沙国防科技大学出版社, 1988
- 2 贾沛然. 弹道导弹弹道学. 长沙国防科技大学出版社, 1987

Application of Hill Equation in Long-distance Interception

Chen Jianxiang

(The Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

A method to reduce the model error of Hill equation in large relative distance case is proposed in this paper, by coordinate shifting to reduce the large relative distance of original system to a small one in new system. That is, as the relative distance of interceptor is up to ρ_1 (ρ_1 is defined as a controlled precision parameter, for example, $\rho_1 = 500\text{km}$), an imaginary moving reference system with its origin at the interceptor's instantaneous position is set up, thus the relative motion parameters of the interceptor in original system are translated into those in the new system (obviously the initial relative distance in the new system will be $\vec{\rho}_{(0)} = 0$). As a result, the large distance problem becomes a small one, the describing precision of Hill equation is improved. This paper provides a theoretical analysis for this method and two examples of computer simulation.

Key words space interception; satellite orbit; relative motion; Hill equation