

## 化学非平衡尾迹流场的数值计算\*

陈伟芳 石于中 吴其芬

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 高超音速化学非平衡尾迹流场的分析及计算是再入空气动力学的一个重要课题。本文采用轴线极限方程,成功地消除了控制方程在轴线上的奇性;采用二阶精度的中心差隐格式,求解了抛物化的N-S方程,得到了20km及60km再入时尾迹流场的数值解。计算结果表明,在远尾迹场,对电子数密度的主要影响是 $O_2$ 的吸附反应。

**关键词** 高超音速; 化学非平衡; 尾迹; 数值模拟

**分类号** V411.1

高超音速飞行器再入时,头部形成强弓形激波。激波与物面之间的激波层区域内,将出现非平衡化学效应。电离气体流经飞行器进入尾迹,尾迹流动具有复杂的气动、物理、化学性质。透彻研究高超音速化学非平衡尾迹流的光电特性,将为识别飞行器及设计突防诱饵提供依据。

如图1所示,本文的研究对象为颈部后的流动。颈部后气流已完成转折,轴向速度远大于横向速度,具有主流特性。与此相应,气流对外激波的排挤趋于稳定,激波后轴向速度趋于常值。轴线上速度随S增加而增加,且小于激波后轴向速度,形成速度梯度。这种速度梯度在粘性作用下迅速消除。因此大速度梯度仅限于轴线附近的狭长筒状区内,此中流动称为内尾流。内尾流上方的流动,称为外尾流。

在远尾迹流场中,由于流体力学量的绝对主导趋势是轴向速度持续上升,流场温度持续下降,因而化学反应必然是复合反应占优势。在远尾迹场,对电子数密度的主要影响是NO电离及复合和 $O_2$ 的吸附反应。

## 1 分析与数值求解的理论基础

### 1.1 控制方程

考虑定常轴对称尾迹流动,取坐标系 $O-sn$ , $OS$ 轴为流场对称轴, $On$ 轴与 $OS$ 轴构

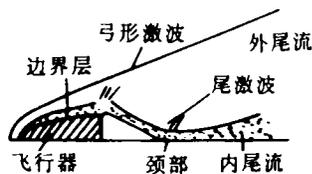


图1 高超音速再入流场

\* 1993年9月6日收稿

成右手正交坐标系，则 OS 方向为流动主流方向，无量纲化后的抛物化 N-S 方程是

$$\frac{\partial \rho u}{\partial s} + \frac{\partial \rho v}{\partial n} + \frac{\rho v}{n} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \rho v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \epsilon^2 \frac{\mu}{n} \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial s} + \rho v \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \mu \left[ 2 \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v}{n} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] \right\} \\ + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) + 2\epsilon^2 \frac{\mu}{n} \left( \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{v}{n} \right) \quad (3)$$

$$\rho u C_p \frac{\partial T}{\partial s} + \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial n} - u \frac{\partial P}{\partial s} - v \frac{\partial P}{\partial n} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( K \frac{\partial T}{\partial n} \right) + \epsilon^2 \frac{K}{n} \frac{\partial T}{\partial n} \\ + \epsilon^2 u \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 - \epsilon^2 \sum_{i=1}^{n_s} J_i C_{p_i} \frac{\partial T}{\partial n} - \sum_{i=1}^{n_s} h_i W_i \quad (4)$$

$$\rho u \frac{\partial C_i}{\partial s} + \rho v \frac{\partial C_i}{\partial n} = W_i - \epsilon^2 \frac{\partial J_i}{\partial n} - \epsilon^2 \frac{J_i}{n} \quad (5)$$

式中  $J_i = -\frac{\mu L_e}{Pr} \frac{\partial C_i}{\partial n}$ ,  $C_i = \frac{\rho_i}{\rho}$ ,  $C_p = \sum_{i=1}^{n_s} C_i C_{p_i}$ ,  $P = \rho RT / (\bar{M} C_{p_\infty})$ ,  $\bar{M} = 1 / \sum_{i=1}^{n_s} \frac{C_i}{M_i}$

在无量纲控制方程中，出现的三个无量纲参数的表达式是

$$Pr = \frac{C_p \mu^*}{K^*}, \epsilon = \sqrt{\frac{\mu_{ref}^*}{\rho_\infty^* u_\infty^* R_n^*}}, L_e = \rho^* C_p^* D^* / K^*$$

本文采用的符号除特别注明外，均为流体力学通用符号，不再说明。

## 1.2 湍流模型

本文采用修正的普朗特二参数混合长模型。

$$\mu_t^* = \rho^* l_1^{*2} \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial n^*} \right)^2 + l_2^{*2} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial n^{*2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

式中  $l_1^* = l_2^* = 0.05 \delta^*$ ，而  $\delta^*$  取值为

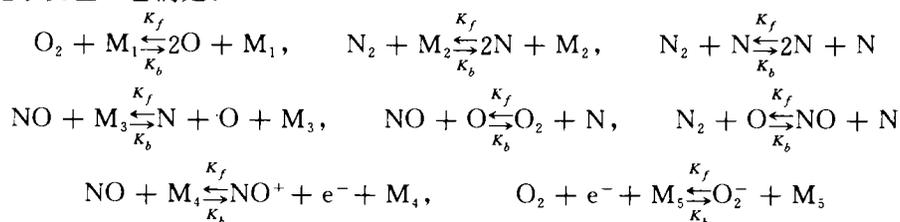
$$\delta^* = \begin{cases} 1.2 n_{0.95}^* + S^* \text{tg} 8^\circ, & \text{当 } \delta^* < 2.4 n_{0.95}^* \\ 2.4 n_{0.95}^*, & \text{当 } \delta^* \geq 2.4 n_{0.95}^* \end{cases}$$

上式中， $n_{0.95}^*$  是  $\frac{u^* - u_{cL}^*}{u_\infty^* - u_{cL}^*} = 0.95$  时  $n^*$  的值， $u_\infty^*$  是外流轴向速度值， $u_{cL}^*$  是轴线速度值。

层流粘性系数用 Sutherland 公式计算。

## 1.3 化学反应模型

计算中考虑了几种化学组分，包括  $O_2$ 、 $N_2$ 、 $O$ 、 $N$ 、 $NO$ 、 $NO^+$ 、 $O_2^-$  及  $e^-$ 。考虑了八个化学反应，它们是：



以上反应中， $M_i$  为催化物，可以是分子也可以是原子。 $K_f$ 、 $K_b$  分别是正向反应和逆

向反应的反应速率常数，通常被表示成为

$$K_f = T^{C_2} \exp[C_0 - C_1/T]; \quad K_b = T^{D_2} \exp[D_0 - D_1/T] \quad (7)$$

式中  $C_0$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $D_0$ 、 $D_1$ 、 $D_2$  对应于不同的反应取不同的值，本文取自文献[4]。

$i$  组元总的生成率  $W_i$  的表达式是

$$\begin{aligned} \frac{W_i}{\rho} &= M_i \sum_{r=1}^{n_r} [(\beta_r - \alpha_r)L_{fr} + (\alpha_r - \beta_r)L_{br}] \\ &= M_i \sum_{r=1}^{n_r} (\beta_r - \alpha_r)(L_{fr} - L_{br}) \end{aligned} \quad (8)$$

式中下标  $r$  表示化学反应方程式的序号， $\alpha_r$ 、 $\beta_r$  分别是正反应和逆向反应当量比系数，而  $L_{fr}$ 、 $L_{br}$  分别是

$$L_{fr} = K_{fr} \rho^{\alpha_r} \prod_{j=1}^{n_j} (\nu_j)^{\alpha_{rj}}, \quad L_{br} = K_{br} \rho^{\beta_r} \prod_{j=1}^{n_j} (\nu_j)^{\beta_{rj}} \quad (9)$$

$$\text{式中 } \alpha_r = \sum_{j=1}^{n_j} \alpha_{rj} - 1, \quad \beta_r = \sum_{j=1}^{n_j} \beta_{rj} - 1.$$

#### 1.4 定解条件

来流条件：给出  $u_\infty$ 、 $P_\infty$ 、 $T_\infty$  及  $C_{i\infty}$ 。

初始条件：在初始推进步  $S=0$  处，给出  $u=u_{(n)}$ 、 $V=V_{(n)}$ 、 $T=T_{(n)}$ 、 $C_i=C_{i(n)}$ 。

激波关系式：在外边界弓形激波上采用兰金——雨果纽关系式，对于激波后组元则采用冻结流条件。下站的激波位置由特征线的相容关系式确定。

轴线条件：根据未知变量  $u$ 、 $V$ 、 $P$ 、 $T$ 、 $C_i$ 、 $\rho$  的奇偶性，由方程(1)~(5)得到轴上极限方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial s} + 2\rho \frac{\partial V}{\partial n} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial s} &= 2\varepsilon^2 u \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\rho u C_p \frac{\partial T}{\partial s} - u \frac{\partial P}{\partial s} = 2\varepsilon^2 K \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} - \sum_{i=1}^{n_s} h_i W_i \quad (11)$$

$$\rho u \frac{\partial C_i}{\partial s} = W_i + 2\varepsilon^2 \frac{\mu}{P_r} L_{ei} \frac{\partial^2 C_i}{\partial n^2} \quad (12)$$

在轴线上， $V=0$ ，由方程(10)~(12)能够确定出轴线上物理量值。

#### 1.5 数值方法

数值求解的总体方案是：由双曲抛物型的控制方程(1)~(6)和对应的定解条件出发，应用沿轴向变步长空间推进方法求解。控制方程组采用串联迭代求解。串联迭代的优点在于差分方程是三对角线的，可用追赶法求解。

为了方便求解，做  $\Phi$  变换，将求解域从物理平面的扇形转变成计算平面的带形，变换式为

$$\begin{cases} \xi = S, & \eta = \frac{n}{n_{sh}} \\ \frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{n'_{sh}}{n_{sh}} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, & \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{n_{sh}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad n'_{sh} = \frac{dn_{sh}}{dS} \end{cases} \quad (13)$$

本文采用的差分方法是

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} = \frac{\bar{U}_n^m - \bar{U}_{n-1}^{m-1}}{\Delta \xi} \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{U}_{n+1}^{m-1} - \bar{U}_n^{m-1}}{\Delta \eta} + \frac{\bar{U}_n^{m-1} - \bar{U}_{n-1}^{m-1}}{\Delta \eta} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{U}_{n+1}^{m-1} - 2\bar{U}_n^{m-1} + \bar{U}_{n-1}^{m-1}}{\Delta \eta^2} + \frac{\bar{U}_{n+1}^m - 2\bar{U}_n^m + \bar{U}_{n-1}^m}{\Delta \eta^2} \right) \\ \bar{U} = \frac{1}{2} (\bar{U}_n^m + \bar{U}_{n-1}^{m-1}) \quad \text{其中 } \bar{U} = (u, V, P, T, C_i) \end{cases} \quad (14)$$

得到各方程的差分表达式后，便可用追赶法逐次求解各个未知变量。

## 2 计算结果与结论

本文得到了高超音速飞行器在 20km 和 60km 高空再入时尾迹流场的数值解。

在 20km 高空，基于来流速度  $u_\infty$  和飞行器底部直径  $D$  的尾流雷诺数  $R_c$  很大。可认为颈部以后的尾流为湍流。图 2 给出了尾迹轴线温度的变化趋势，表明在湍流混合区 ( $0 < S < 70$ ) 轴线上温度迅速降低，内尾流热能迅速向外尾流扩散，很快出现低温区 ( $S > 70$ )，此后的尾流场温度维持在 1000℃ 左右缓慢下降。图 3 显示了轴向速度  $u$  的分布剖面沿轴线的变化情况：粘性内尾流与无粘外尾流间的大速度梯度，在粘性作用下迅速消除。

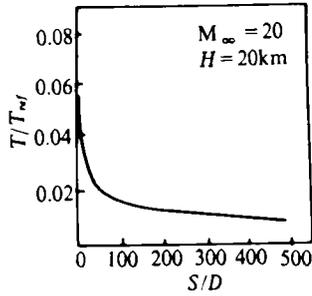


图 2 轴线温度变化

在 60km 高空，分别计算了层流尾流与湍流尾流。图 4、图 5 给出了两种流动状态下所得结果的比较。它表明：由于 60km 高空的气体密度相对小，雷诺数  $R_c$  也小，湍流扩散对单个物理量值的影响不大。但是，对于反映整个尾迹物理和化学特性的综合量  $\int_0^{\delta^*} n_e dn^*$  (尾迹横截面上总的电子数)，层流结果与湍流结果相差很大，如图 6 所示。

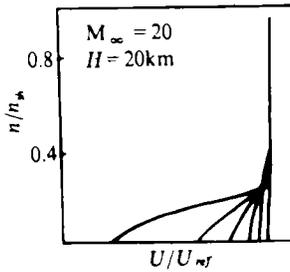


图 3 尾流轴向速度剖面

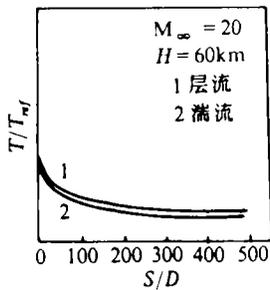


图 4 轴线温度

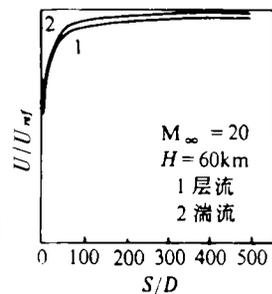


图 5 轴线速度

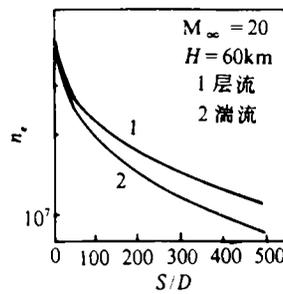


图 6 截面总电子数

为了考查  $O_2$  吸附反应对尾迹流场电子数密度的影响，图 7 把考虑了  $O_2$  吸附反应与没考虑  $O_2$  吸附反应的结果作了比较。结果表明，越是尾迹下游， $O_2$  吸附反应对尾迹电子密度分布的影响就越大。而且这种影响在外尾流区比内尾流区大。由于外界的冷空气不断地被吸入，尾迹中  $O_2$  的含量越来越高，以及  $O_2$  吸附反应的反应速率常数对温度依赖性不高，计算非平衡尾流场的电子密度分布时考虑  $O_2$  吸附反应是必要的。

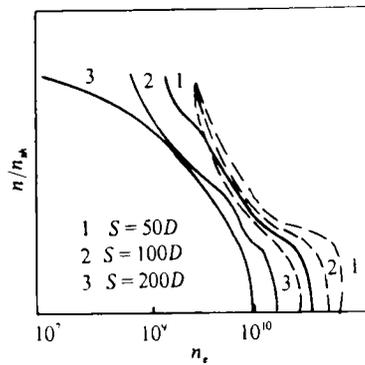


图 7 吸附反应对尾流电子密度的影响  
虚线为没考虑吸附反应

## 参 考 文 献

- 1 赵国英. 力学进展, 1981, (11)
- 2 Wen K S, et al. AIAA paper, 1967, 67-21
- 3 T C Lin, et al. AIAA Paper, 1979, 79-0153
- 4 E W Miner, Clark H Lewis. NASACR-2551

## Numerical Computation of Chemical Non-equilibrium Wakes

Chen Weifang Shi Yuzhong Wu Qifen

(The Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

### Abstract

The analysis and computation of chemical non-equilibrium hypersonic wakes are important tasks of reentry aerodynamics. This paper, using axial equations, successfully eliminates the axial singularity in governing equations. Using central differences secret scheme with two rand accuracy, it has solved the parabolic N-S equations and obtained numerical solutions of wakes at 20 km and 60 km, The results show that the effect of oxygen-electron attachment processes on electron density in far wakes is important.

**Key words** hypersonic, chemical non-equilibrium; wakes; numerical emulation