国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 16 卷第 2 期　1994 年 6 月　Vol. 16 No. 2

I. I. D. 并行分布式检测网相同门限假定的合理性条件*

谢红卫
（国防科技大学自动控制系　长沙　410073）
苏建志
（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　并行分布式检测网最优设计是复杂难解的，相同门限假定使 I. I. D. 网的设计极度简化，并在实际工程中广泛使用。本文研究了相同门限假定的合理性条件，为合理采用习惯性处理方法提供了理论依据。

关键词　并行；分布式；检测网；合理性

分类号　O233

如图 1 的并行分布式检测网，在文献［1］、［2］中得到了深入研究。

此检测系统的工作流程是各检测器（DM_i，Decision Maker）彼此独立地采样，在局部采样$\{y_i\}$的基础上做出局部检测判决 $u_i=0$，*or* 1，并仅以 1-*bit* 的通信量向系统内部传输局部处理结果 u_i. 得到积累的不是原始采样集 $\{y_1, \cdots, y_N\}$，而是 $\{u_1, \cdots, u_N\}$，融合中心在此不充分信息集的基础上作出系统最终判决 u_f.

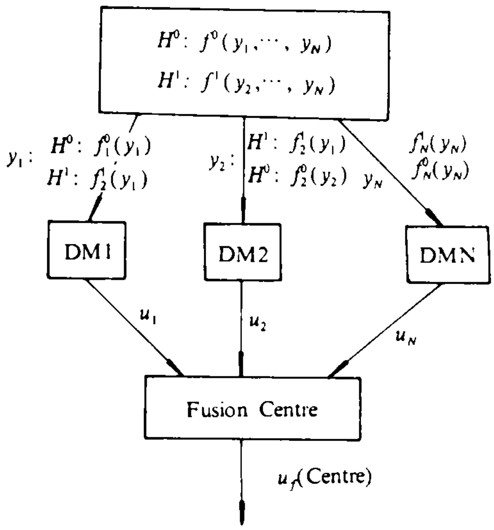

图 1　并行检测图

多检测器组网工作，采用分布式、非充分信息的处理方式，主要是为了减小通信容量和贮存困难，以提高检测系统的可行性。检测器单独工作时，以采用似然比检验（LRT）为最优。当检测器组网分布式工作时，应采用什么样的局部处理？各检测器应如何协调工作？对此文献［1］、［2］给出了结论。

定理 1　N 独立并行检测系统，给定虚警水平 $P_{F_f}\leqslant\alpha$，系统在各 DM 均采用 LRT，融合法则亦为 LRT 且可由 A 中逻辑实现时，使 P_{Df}达到最大。其中 A 为可能最优逻辑集。对给定之融合逻辑，DM_i 的协调门限应满足：

* 1993 年 11 月 20 日收稿

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{\Delta F_i}{\Delta D_i}\lambda, i = 1,\cdots,N \\ P_{F_f} = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

式中 λ_i 为局部门限，λ 为 Lagrange 乘子。

$$\Delta F_i = P(u_f = 1 | u_i = 1, H^0) - P(u_f = 1 | u_i = 0, H^0)$$

$$\Delta D_i = P(u_f = 1 | u_i = 1, H^1) - P(u_f = 1 | u_i = 0, H^1)$$

而总体最优之 P_{Df}为对 A 穷尽搜索之最大者。

由定理 1 可知，并行分布式检测网的最优设计是十分复杂的，这主要缘于下面两个问题：

问题 1　给定一个融合逻辑，有相应的方程组（1）以确定 DM_i 协调地工作。如何求解方程组（1）？这通常涉及不完全积分，是难解的。

问题 2　如何确定最优逻辑？它与采样分布及虚警水平 α 有关。大量的仿真计算表明，没有一般的选择准则，不同问题有不同的选择方式。

可能最优逻辑集 A 中，有一类十分重要的子集：K/N（N 中取 K）逻辑。融合法则依 $\{\mu_i\}$ 之和来判定 u_f 取值。

I. I. D. 并行分布式检测网（简称 I. I. D. 检测网）是指局部采样 $\{y_i\}$ 为 I. I. D. 变量的并行分布式检测网，在工程应用中广泛存在，并可望能简化最优设计过程，这是本文将深入研究的。

1　I. I. D. 检测网的相同门限假定

当局限于考察 I. I. D. 检测网，融合逻辑只取 K/N 逻辑时，由于对称性，很直观且在工程实践中惯用的进一步假定是各 DM_i 采用相同的局部工作门限，即

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = \lambda_0 \tag{2}$$

于是各 DM_i 有相同的局部判决性能特征（P_{F_0}，P_{D_0}）。当取定某个 K/N 逻辑时，局部虚警 P_{F_0}可由下式决定：

$$P_{F_f} = \sum_{i=k}^{N} C_N^i P_{D_0}^i (1 - P_{F_0})^{N-i} = \alpha \tag{3}$$

进而易得局部工作门限 λ_0.

采用相同门限假定，避开了完整求解方程组（1）的困难，虽仍要搜索最优逻辑，但设计过程已得到很大程度的简化，这正是目前广泛使用的惯用方法。

分布式检测网的优化，归根到底是使 Lagrange 函数 P_{Df}-λP_{Ff}最大。给定 α 和 K/N 逻辑后，方程组（1）给出了协调局部门限组的一阶优化条件。方程组（2）作为一个特解，它不一定使 $P_{D_f}-\lambda P_{Ff}$最大，甚至不能达到极大。文献［3］、［4］都举例说明了这一点。因此我们有必要对相同门限假定（2）式的适用范围作进一步研究。所谓方程组（2）的合理性是指：对任意给定之 $P_{Ff}\leqslant\alpha$ 和 K/N 逻辑，（2）式都确实使 $P_{Df}-\lambda P_{Ff}$达到极大。

2　相同门限的合理性条件

本节希望给出（2）式的合理性条件和简单判据，以指导前述惯用方法的合理使用。

为此我们有定理 2。

定理 2　给定 I. I. D. 检测网和 K/N 逻辑，则（2）式为合理假定的充分条件为

$$\frac{P_{F0}}{P_{D_0}}\lambda_0 \text{ 和 } \frac{1-P_{F_0}}{1-P_{D_0}}\lambda_0$$

为 λ_0 的严格单调增函数，式中 λ_0 为局部 LRT 之门限，(P_{F_0}, P_{D_0}) 为局部虚警、检测概率。

证明　易验证 $\lambda_1=\cdots=\lambda_N$ 满足 Lagrange 问题之一阶条件（1），今求 $P_{D_f}-\lambda P_{F_f}$ 在 $\lambda_1=\cdots=\lambda_N=\lambda_0$ 上的全微分，我们有

$$\mathrm{d}^2(P_{D_f}-\lambda P_{F_f}) = \sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{i\neq j}\Big(\frac{\partial \Delta D_i}{\partial P_{Dj}}(-\lambda_i l_i)(-\lambda_j l_j) + \frac{\partial \Delta F_i}{\partial P_{F_j}}\lambda l_i(-l_j)\Big)\mathrm{d}\lambda_i d\lambda_j - l_i\Delta D_i(\mathrm{d}\lambda_i)^2\Big]$$

式中 l_i 为局部似然比在 H^0 条件下的密度函数，在条件（2）下

$$\Delta D \equiv \Delta D_i = C_{N-1}^{k-1}P_{D_0}^{k-1}(1-P_{D_0})^{N-k}$$

$$\Delta F \equiv \Delta F_i = C_{N-1}^{k-1}P_{F_0}^{k-1}(1-P_{F_0})^{N-k}$$

$$\left.\frac{\partial \Delta D_i}{\partial P_{D_j}}\right|_{P_{D0}} = C_{N-2}^{k-2}P_{D_0}^{k-2}(1-P_{D_0})^{N-k} - C_{N-2}^{k-1}P_{D_0}^{k-1}(1-P_{D_0})^{N-k-1}$$

$$\left.\frac{\partial \Delta F_i}{\partial P_{F_j}}\right|_{P_{F0}} = C_{N-2}^{k-2}P_{F_0}^{k-2}(1-P_{F_0})^{N-k} - C_{N-2}^{k-1}P_{F_0}^{k-1}(1-P_{F_0})^{N-k-1}$$

$$\lambda = \frac{\Delta D_i}{\Delta F_i}\lambda_i$$

记 $\mathrm{d}\lambda_i d\lambda_j$ 的相同系数为 B，$(\mathrm{d}\lambda_i)^2$ 之系数为 C，则

$$\mathrm{d}^2(P_{D_f}-\lambda P_{F_f}) = B\sum_{i=1}^{N}(\sum_{j\neq i}\mathrm{d}\lambda_i\mathrm{d}\lambda_j) - C\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{d}\lambda_i)^2$$

又
$$P_{F_f} = \text{Const.}$$

有
$$\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{d}\lambda_i) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\lambda_N = -\sum_{i=1}^{N-1}(\mathrm{d}\lambda_i)$$

代入上式得

$$\mathrm{d}^2(P_{Df}-\lambda P_{Ff}) = -(B+C)\Big[\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{d}\lambda_i)^2\Big]$$

因此，（2）为合理假定的充分条件为

$$B+C>0$$

而经过大量运算可得

$$B+C = P_{D_0}^{k-1}(1-P_{D0})^{N-k}\Big[C_{N-2}^{k-2}\frac{P_{D0}}{P_{F0}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}\Big(\frac{P_{F_0}}{P_{D_0}}\lambda_0\Big) + C_{N-2}^{k-1}\frac{1-P_{D0}}{1-P_{F0}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}\Big(\frac{1-P_{F_0}}{1-P_{D_0}}\lambda_0\Big)\Big]$$

故得证。

推论 1　对 AND（$k=N$）逻辑，（2）为合理假定的充分条件为 $\frac{P_{F_0}}{P_{D_0}}\lambda_0$ 为 λ_0 的严格增

函数。

证明 略。

推论 2 对 OR ($k=1$) 逻辑，(2) 为合理假定的充分条件为$\frac{1-P_{F_0}}{1-P_{D_0}}\lambda_0$ 为 λ_0 的严格增函数。

证明 略。

至此我们得到了相同门限假定的合理性判据：$\frac{P_{F0}}{P_{D0}}\lambda_0$ 和$\frac{1-P_{F0}}{1-P_{D0}}\lambda_0$ 的单调性。它取决于采样分布的总体性质。

进一步，若能指出方程组 (1) 只有唯一解，则相同门限假定 (2) 不仅是合理的，而且给出了最优局部门限组，使 $P_{Df}-\lambda P_{Ff}$最大。对此我们有：

定理 3 给定 I. I. D. 检测网和 AND 逻辑，相同门限为最优门限组的充分条件是 $\frac{P_{F0}}{P_{D0}}\lambda_0$ 为 λ_0 的单调增函数。

证明 考察一阶条件即方程组 (1)，视 α 变动，因而乘子 λ 为变量，若 (1) 能唯一确定隐函数 $\lambda=A(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$，则相同门限为最优门限组。其充分条件为 Jacobi 行列式：

$$J(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)\neq 0$$

当取 AND 逻辑时，在 (1) 的解空间上，经运算将有

$$J(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)=\lambda^N\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{P_{F_i}}{P_{D_i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left(\frac{P_{D_i}}{P_{F_i}}\right)\right]\begin{vmatrix}a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & a_N\end{vmatrix}$$

式中 $a_i=\left[\lambda_i\frac{P_{F_i}}{P_{D_i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left(\frac{P_{D_i}}{P_{F_i}}\right)\right]^{-1}$

故 $$J(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)=\lambda^N\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{P_{F_i}}{P_{D_i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left(\frac{P_{D_i}}{P_{F_i}}\right)\right]\left[\prod_{i=1}^{N}(a_i-1)+\sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{j\neq i}^{N}(a_j-1)\right)\right]$$

而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left(\frac{P_{D_i}}{P_{F_i}}\right)=\frac{l_i(P_{D_i}-\lambda_i P_{F_i})}{P_{F_i}^2}>0$$

$$a_i-1=\frac{P_{D_i}^2}{\lambda_i l_i(P_{D_i}-\lambda_i P_{F_i})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left(\frac{P_{F_i}}{P_{D_i}}\lambda_i\right)$$

又 DM_i 的采样同分布，$\frac{P_{F_0}}{P_{D_0}}\lambda_0$ 关于 λ_0 单调增时，有

$$a_i-1>0$$

最终有：$J(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)>0$． 得证。

类似地，我们有

定理 4 给定 I. I. D 检测网和 OR 逻辑，相同门限为最优门限组的充分条件为 $\frac{1-P_{F_0}}{1-P_{D_0}}\lambda_0$ 关于 λ_0 单调增。

证明 略。

至此，就 AND、OR 逻辑，我们给出了相同门限为最优门限组的判据，它们仍然取决于采样分布的总体性质。对一般 K/N 逻辑，最优性条件因 Jacobi 行列式的困难，暂未得到。

3 常见分布下相同门限的合理性

限于篇幅，我们仅给出判定$\frac{P_F}{P_D}\lambda$是否单调增的步骤，并就采样条件分布服从 Gauss 分布（同方差），Rayleigh 分布和 Rayleigh 分布的积累分布情形，验证此判据。

实际应用中通常采用对数似然比检验，一般地有

$$P_D = \int_t^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$$

$$P_F = \int_t^{+\infty} f_0(x)\mathrm{d}x$$

$$\lambda = \frac{f_1(t)}{f_0(t)} = e^{\alpha t+\beta} \qquad (\alpha > 0, \beta \text{ 为常数})$$

将只须验证$\frac{P_F}{P_D}\lambda$为 t 的单调增函数。

求导并提取出符号未定部分，则需验证

$$H_1(t) = \lambda' P_F P_D (\lambda f_0)^{-1} - (P_D - \lambda P_F) > 0$$

这通常是困难的。而通常易验证 $\lim\limits_{t\to+\infty} H_1(t) \geqslant 0$，故需验证 $H_1(t)$ 关于 t 单调减，经运算可知，只须

$$H_2(t) = f_0{}^2 + P_F f_0 > 0$$

$H_2(t)$ 只与 P_F 有关，易于验证。因此判据$\frac{P_F}{P_D}\lambda$单调增的验证步骤为：首先验证 $H_1(t) > 0$ 或 $\lim\limits_{t\to+\infty} H_1(t) = 0$，再次验证 $H_2(t) > 0$. 下面我们分别验证有不同采样分布下，相同门限假定的合理性。

(1) Gauss 分布（同方差），此时有

$$P_D = \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_t^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$$

$$P_F = \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_t^{+\infty} f_0(x)\mathrm{d}x$$

$$\lambda = e^{s(t-\frac{s}{2})}, \qquad s > 0 \text{ 为常数}$$

由 Gauss 分布函数基本不等式，即 $t>0$ 时

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) f_0(t) < P_F(t) < \frac{1}{t} f_0(t)$$

可知

$$\lim_{t\to+\infty} P_F(f_0(t))^{-1} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda P_F \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda f_0(t)}{t} = 0$$

故

$$\lim_{t\to+\infty} H_1(t) = 0$$

而 $$H_2(t)=f_0^2+P_Ff'_0=f_0(t)(f_0(t)-tP_F)>0$$
可知$\frac{P_F}{P_D}\lambda$关于λ单调增，因此在 Gauss 环境下采用相同门限假定的惯用方法是合理的。

(2) Rayleigh 分布，此时有

$$P_D=e^{-\frac{t}{1+s}}$$
$$P_F=e^{-t}$$
$$\lambda=\frac{1}{1+s}e^{\frac{s}{1+s}t}\qquad t\geqslant 0,S>0\text{ 为常数}$$

因而有 $H_1(t)\equiv 0$，$\frac{P_F}{P_D}\lambda\equiv\frac{1}{1+s}$.

针对 Rayleigh 分布及 AND 逻辑，本文之判别失效，需另加研究。事实上，就 Rayleigh 分布，OR 逻辑是最优逻辑。

(3) Rayleigh 分布之 M 次 ($M>1$) 积累分布，此时有

$$P_D=e^{\frac{-t}{1+s}}\left(1+\frac{t}{1+s}+\cdots+\frac{1}{(M-1)!}\left(\frac{t}{1+s}\right)^{M-1}\right)$$
$$P_F=e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{M-1}}{(M-1)!}\right)$$
$$\lambda=\frac{1}{(1+s)^M}e^{\frac{s}{1+s}t},\qquad t\geqslant 0,s\text{ 为常数}$$

易验证，$\lim\limits_{t\to\infty}H_1(t)=0$

而 $$H_2(t)=e^{-t}f_0(t)\left[\frac{(M-1)}{t}+\frac{(M-1)-1}{1}+\frac{(M-1)-2}{2!}t+\cdots+\frac{1}{(M-2)!}t^{M-3}\right]>0$$

因此在此采样环境下，利用相同门限设计 I. I. D. 检测网也是合理的。

$\frac{1-P_F}{1-P_D}\lambda$的单调性验证过程，同样可得到简化，本文不再赘述。虽然文献[3]、[4]举例说明，相同门限假定可能导致 I. I. D. 检测网性能劣化，但本文研究表明，对许多常见分布，采用相同门限是合理的，因而可沿用简化设计过程的惯用方法。对不同的采样分布有必要验证相同门限假定的合理性，以确保检测性能的优化。

4 结论

本文研究了 I. I. D. 检测网采用相同局部门限的合理性条件，在 AND、OR 逻辑场合还确定了相同门限为最优门限组的条件，并就几种常见采样分布验证了相同门限假定的合理性。虽然采用相同门限能简化 I. I. D. 检测网的设计，但可能导致性能劣化，因此需先验证其合理性条件。本文为此提供了理论依据。

参 考 文 献

1 谢红卫. 分布式检测优化设计理论研究:[学位论文]. 国防科技大学七系，1993

2 谢红卫，苏建志. 分布式检测最优化研究. 国防科技大学校庆文集. 1993

3 J D Papastavrou, M Athans. Distributed Detection by a Large Team of Sensors in Tandem. IEEE Trans. on AES, 1992, (3)

4 J N Tsitsiklis. Decentralized Detection by a Large number of Sensors. Mathematics of Control, Signal and Systems, 1988, 1 (2)

5 Xie Hongwei, Wang Hao. Optimization for the Design of Distributed Detection. Proc. of 2nd. IC-SSSE., Beijing, Aug, 1993

On Reasonability of Identical Thresholds for I. I. D. Distributed Detection Network in Parallel

Xie Hongwei

(The Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Su Jianzhi

(The Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

In this paper, we Proposed the reasonability conditions for identical thresholds assumption, which is widely adopted in the design of I. I. D. distributed detection network. This offers the theoretical foundation for the habitually used design procedure.

Key words parallel; distributed; detection network; reasonability