

## 关于自适应滤波技术的一些思考\*

张金槐

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

**摘要** 本文研究工程实践中应用 Kalman 滤波时出现的滤波异常现象。文中从滤波异常的检测出发,由此构成动力学噪声方差阵的自适应估计。对于常用的衰减记忆滤波,提出了衰减因子的自适应确定方法,对于未知的动力学噪声和观测噪声的方差阵,运用 Bayes-MI 估计方法给出了递推估算方案。对于构造自适应滤波的技术途径,提出了一些看法。

**关键词** Kalman 滤波, 自适应滤波

**分类号** V417.7, O213

Kalman 滤波是在标准条件下给出的。所谓标准条件,就是滤波所作的所有假设条件。在工程实践中,要完全满足滤波所设定的条件是困难的。这是由于两方面的原因,其一,所研究的对象其发展规律难于完善地描述,特别是有些客观现象的表现程度还没有被我们完全掌握。例如,对再入飞行器的拦截,目标的运动特性只能有一定程度的了解。因此,要建立一个确切的动力学模型是困难的。其二,模型中的动态噪声的统计特性不可能是完全已知的,但 Kalman 滤波要求确切地给出它们的期望值和方差阵。因此,所获得的滤波值并不具有无偏、最小方差这种优良性。

一般地说,测量模型比较容易建立,而测量噪声特性可以在测量设备出厂时鉴定中确定。如果现场试验的环境条件不同,此时的噪声统计特性可以用自校正的方法确定<sup>[1]</sup>。因此,主要问题在于动力学模型的建立及噪声特性的确定。自七十年代以来,一些学者致力于动力学模型的补偿及噪声特性的估计<sup>[6]</sup>。不过从工程实践的观点来看,还有不少值得探讨的问题,例如,给出的方法应具有运用的方便性及可算性,而不是只给出形式解。

本文将首先从滤波为异常的识别开始,然后构造自适应滤波方法,对于实现自适应滤波过程中的问题将予以充分注意。

## 1 滤波异常的检测与 Q 的自适应估计

设有动力学模型  $X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + W_k$ , 观测模型为  $Z_k = H_k X_k + V_k$ , 且  $\{W_k\}$  为零均值的白噪声序列,  $\text{cov}(W_k, W_j) = Q_k \delta_{k,j}$ ;  $\{V_k\}$  为零均值白噪声序列,  $\text{cov}(V_k, V_j) = R_k \delta_{k,j}$ ,  $R_k > 0$ ;  $E[W_k V_j^T] = 0$ ,  $\forall k, j$ 。此外,设  $\{W_k\}$ ,  $\{V_k\}$  均为正态序列,  $X_0$  为初态,  $X_0 \sim N(\bar{X}_0, P_0)$ ,  $X_0$  与  $W_k, V_k$  为独立。此时,我们有 Kalman 滤波的五个公式:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k,k} &= \hat{X}_{k,k-1} + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_{k,k-1}], \quad \hat{X}_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1,k-1}, \\ K_k &= P_{k,k-1} H_k^T [H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_k]^{-1}, \end{aligned}$$

\* 1993年7月28日收稿

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1}P_{k-1/k-1}\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}, P_{k/k} = (I - K_k H_k)P_{k/k-1}$$

滤波的起始条件为给定  $\hat{X}_0^*$ ,  $P_0^*$ 。

在上述假设条件下,  $X_k$  的滤波值  $\hat{X}_{k/k}$  为  $X_k$  的无偏最小方差估计, 即  $\hat{X}_{k/k} = E[X_k / \mathcal{Z}^{(k)}]$ , 这里  $\mathcal{Z}^{(k)} = \{Z_1, \dots, Z_k\}$ 。当滤波的条件不完全满足时, 滤波不具有最小方差这种优良性质, 且有可能发生滤波的发散现象。

从工程实践的实际情况出发, 往往可以认为测量模型及测量噪声的统计特性是可信的(否则, 可运用自校正方法对模型进行补偿和对  $R_k$  进行估计<sup>[1]</sup>)。这样, 当滤波发生异常时, 主要原来自动力学模型的不正确和动态噪声  $W_k$  的统计特性不清楚。下面, 在这种场合下, 我们讨论滤波的适应性问题。

关于滤波异常的检测是不困难的。其基本思想是: 在标准条件下, 滤波应具有某些理论特性, 而在观测为可信的情况下, 这种理论特性和观测信息应互相匹配。由此发现滤波的异常现象。

滤波的理论特性常以新息序列  $\{\nu_k\}$  的性质来刻画。此处

$$\nu_k = Z_k - E[Z_k / \mathcal{Z}^{(k-1)}] = Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1}$$

易知 
$$\nu_k \sim N(0, H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k) \quad (1)$$

且  $\{\nu_k\}$  为白噪声序列。由此容易构成辨识滤波是否异常。事实上, 注意到

$$E[\nu_k \cdot \nu_k^T] = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k$$

于是

$$\chi_m^2(k) \triangleq \nu_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \nu_k \sim \chi_m^2 \quad (2)$$

即  $\chi_m^2(k)$  为具有  $m$  个自由度的  $\chi^2$  一变量。 $m$  是观测量的维。上述结论是在滤波模型和噪声特性正确的前提下得到的, 因此, 在正常滤波之下, 有

$$P\{\chi_m^2(k) > \chi_m^2\} = \int_{\chi_m^2}^{\infty} k_m(\chi^2) d\chi^2 = \alpha$$

其中  $k_m(\cdot)$  为  $\chi^2 m$  的概率密度函数。于是在检验水平  $\alpha$  之下, 当  $\chi_m^2(k) > \chi_m^2$  时, 我们认为  $t_{k-1}$  时刻的滤波是异常的。

上述检测方案易于实现, 不过, 我们仅用了一个实测子样  $\nu_k$ 。为提高检验的效 (power), 可采用多个  $\nu_k$ , 例如  $\nu(k), \nu(k+1), \dots, \nu(k+N-1)$ 。它们是独立的, 于是

$$\chi^2(N) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \nu_{k+i}^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R_i)^{-1} \nu_{k+i} \sim \chi_{mN}^2$$

此处,  $\chi_{mN}^2$  为具有  $mN$  个自由度的  $\chi^2$  一变量。这样, 同样应用  $\chi^2$  一检验以辨识滤波的异常。例如, 取  $\alpha = 5\%$ ,  $m=3$ ,  $N=2$ , 此时查表得  $\chi_{12}^2 = 12.592$ 。于是当滤波至  $t_{N+1}$  时, 可算得  $\nu(k), \nu(k+1)$ , 从而可算得  $\chi^2(N)$ 。当  $\chi^2(N) > 12.592$  时, 则认为滤波异常。

如果通过上述辨识方法而无异常发现, 则称滤波是自适应的。这种自适应是在一定的检出水平  $\alpha$  之下说的。当然, 这种自适应并不表示滤波具有无偏、最小方差这种优良性。

下面, 我们由滤波的适应性构造  $Q_k$  的自适应估计。

当动力学模型具有较大误差时, 人们常常以增大  $Q_k$  的取值以补偿模型的误差, 使达到自适应的目的。即应用所谓“虚拟白噪声”方法, 用 Monte-Carlo 的方法选择  $Q$ 。我们认为, 运用上节滤波的适应性检测方法, 易于构成  $Q$  的自适应估计。事实上, 按照对于动力学模型的知识, 特别是对模型噪声的了解, 选定一个  $Q$  的取值, 为使滤波在  $t_{k-1}$  时刻为自适应的, 则在检测水平  $\alpha$  之下, 应有

$$\chi_m^2(k) \leq x_0^2 \quad (3)$$

其中  $\chi_m^2(k)$  由 (2) 表示, 其中的  $P_{k/k-1}$  含有  $Q_{k-1}$ :

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (4)$$

因此选定  $Q_{k-1}$  时, 便可算得  $\chi_m^2(k)$ 。如果  $\chi_m^2(k) < x_0^2$ , 则认为  $Q_{k-1}$  是适宜的。否则, 改变  $Q_{k-1}$  的选取, 直到滤波自适应为止。

按照上述思考,能否由(3)式解出 $Q_{k-1}$ ?直观地看,这种直接的解法是困难的,因为 $Q$ 的解不是唯一的。如果以 $\chi_{\omega}^2(k) = x_{\omega}^2$ 作为条件,那末要去解出 $Q_{k-1}$ 也是困难的。因为 $Q_{k-1}$ 为 $n \times n$ 对称阵,共有 $n \cdot (n+1)/2$ 个未知元素,因此要想获得唯一解是不可能的。

从工程实践考虑,我们并无必要在每一个不同时刻 $t_k$ 都去作 $Q_k$ 的自适应估计。对于动力学模型噪声不是太剧烈变化的场合,我们认为在 $N$ 步观测之内 $Q$ 保持常值。这样,在 $N$ 步观测之下,需要估计的未知参数仍为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个,但观测信息增加了。注意到在 $N$ 步观测之内,有

$$E[\nu_i \nu_i^T] = H_i P_{i,i-1} H_i^T + R_i = H_i (\Phi_{i,i-1} P_{i-1,i-1} \Phi_{i,i-1}^T + Q_{i-1}) H_i^T + R_i \quad (5)$$

于是

$$\nu_i \nu_i^T = H_i (\Phi_{i,i-1} P_{i-1,i-1} \Phi_{i,i-1}^T + Q_{i-1}) H_i^T + R_i + \eta, \quad i = k, k+1, \dots, k+N-1 \quad (6)$$

式中 $\eta$ 为零均值噪声阵。

要直接从(6)中给出 $Q_{i-1}$ 的估计并不是轻而易举的,虽然 $Q_{i-1} = Q (i = k, \dots, k+N-1)$ 。此外,(6)中的 $P_{i-1,i-1}$ 含有未知的 $Q$ :

$$P_{i-1,i-1} = [P_{i-1,i-2}^{-1} + H_{i-1}^T R_{i-1}^{-1} H_{i-1}]^{-1} \quad (7)$$

当 $i = k, k+1, \dots, k+N-1$ 时, $P_{k-1,k-2}$ 中含有 $Q_{k-2}$ , $P_{k/k-1}$ 中含有 $Q_{k-1} = Q, \dots, P_{k+N-2/k+N-3}$ 中含有 $Q_{k+N-3} = Q$ ,其中除了 $Q_{k-2}$ 是前 $N$ 个观测区的 $Q$ 值(它可以认为是已知的,否则在前 $N$ 个观测区要进行自适应估计,使 $Q_{k-2}$ 成为已知的)之外,在 $P_{k/k-1}, \dots, P_{k+N-2/k+N-3}$ 均含有未知的 $Q$ ,于是(6)可写为

$$\begin{cases} \nu_k \nu_k^T = H_k (\Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q) H_k^T + R_k + \eta_k \\ \nu_{k+1} \nu_{k+1}^T = H_{k+1} (\Phi_{k+1,k} P_{k/k} (Q) \Phi_{k+1,k}^T + Q) H_{k+1}^T + R_{k+1} + \eta_{k+1} \\ \vdots \\ \nu_{k+N-1} \nu_{k+N-1}^T = H_{k+N-1} (\Phi_{k+N-1,k+N-2} P_{k+N-2/k+N-2} (Q) \Phi_{k+N-1,k+N-2}^T + Q) \\ \quad \cdot H_{k+N-1}^T + R_{k+N-1} + \eta_{k+N-1} \end{cases} \quad (8)$$

想从上述关系式作出 $Q$ 的估计是困难的。出于工程应用的思考,当 $Q$ 在 $N$ 步观测之内为常值的对角阵,那末由(8)可以获得关于 $Q$ 的解。此时,观察(8)式,每个矩阵关系式表示了 $m^2$ 个能量表示的关系式,而 $Q$ 共有 $n$ 个未知的元。因此,如果 $m^2 \geq n$ ,则运用(8)中的一个式子就可得到 $Q$ 的解。如果 $m^2$ 式子尚不足以得到 $Q$ 的唯一解,则可增加信息(如增加 $\nu_{k+1}, \nu_{k+1}^T$ 的表达式)直至方程的个数不少于 $n$ 为正。今以 $m^2 \geq n$ 为例作必要的说明。记

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{nn} \end{bmatrix}; \quad Y_k = \nu_k \nu_k^T - (H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1,k-1} \Phi_{k,k-1}^T H_k^T + R_k)$$

其中 $Y_k$ 是 $m \times m$ 矩阵。记

$$Y_k = [y_1(k) : y_2(k) : \dots : y_m(k)]$$

将 $Y_k$ 的拉直向量记为 $\bar{Y}_k$ ,即

$$\bar{Y}_k = [y_1^T(k), \dots, y_2^T(k), \dots, \vdots, \dots, y_m^T(k)], \text{它是 } m^2 \times 1 \text{ 维向量。}$$

此外,记 $H_k = [h_1(k) \dots h_n(k)]$ ,即 $h_i(k)$ 为 $H_k$ 的第 $i$ 列组成的向量,于是

$$H_k Q H_k^T = h_1(k) h_1^T(k) q_{11} + h_2(k) h_2^T(k) q_{22} + \dots + h_n(k) h_n^T(k) q_{nn}$$

将 $H_k Q H_k^T$ 拉直,则

$$\overrightarrow{H_k Q H_k^T} = \overrightarrow{h_1(k) h_1^T(k)} q_{11} + \dots + \overrightarrow{h_n(k) h_n^T(k)} q_{nn}$$

其中各拉直向量均为 $m^2 \times 1$ 向量。于是我们有

$$\bar{Y}_k = [\overrightarrow{h_1(k) h_1^T(k)} : \overrightarrow{h_2(k) h_2^T(k)} : \dots : \overrightarrow{h_n(k) h_n^T(k)}] \begin{bmatrix} q_{11} \\ \vdots \\ q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \mathcal{X}(k) \cdot \text{diag}Q + \mathcal{E} \quad (9)$$

其中  $\mathcal{X}(k) = [\overrightarrow{h_1(k)h_1^T(k)}; \cdots; \overrightarrow{h_n(k)h_n^T(k)}]$ , 它为  $m^2 \times n$  矩阵,  $\text{diag}Q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ \vdots \\ q_{nn} \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{E}$  为  $\eta$  的拉直向量。

这样, 由 L.S. 估计, 即得

$$\widehat{\text{diag}Q} = [\mathcal{X}^T(k)\mathcal{X}(k)]^{-1}\widehat{Y}_k \quad (10)$$

在解的过程中, 需要计算  $P_{k-1/k-1}$ , 它含有  $Q_{k-2}$ , 它是前  $N$  个观测步长中的  $W_{k-2}$  的方差阵。我们认为它是已知的, (因此, 需要给出  $Q_0$ )。

下面以另一种方式给出  $Q$  的估计。

注意到

$$E[v_k^T v_k] = \text{tr}E[v_k \cdot v_k^T]$$

于是

$$\begin{cases} v_k^T v_k = \text{tr}[H_k(\Phi_{k,k-1}P_{k-1/k-1}\Phi_{k,k-1}^T + Q)H_k^T + R_k] + \varepsilon_k \\ \vdots \\ v_{k+N-1}^T v_{k+N-1} = \text{tr}[H_{k+N-1}(\Phi_{k+N-1,k+N-2}P_{k+N-2/k+N-2}(Q)\Phi_{k+N-1,k+N-2}^T \\ + Q)H_{k+N-1}^T + R_{k+N-1} + \varepsilon_{k+N-1}] \end{cases}$$

这里假定  $N \geq n$ , 仍记

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & q_{nn} \end{bmatrix}$$

记

$$y_i = v_i^T v_i - \text{tr}[H_i(\Phi_{i,i-1}P_{i-1/i-1}\Phi_{i,i-1}^T)H_i^T + R_i] \quad i = k, k+1, \dots, k+N-1$$

则有

$$y_i = \text{tr}(H_i Q H_i^T) + \varepsilon_i, \quad i = k, \dots, k+N-1 \quad (11)$$

记

$$H_i = [h_{ij}(k)], \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

则

$$\text{tr}(H_i Q H_i^T) = [\|h_1(i)\|^2; \|h_2(i)\|^2, \dots, \|h_n(i)\|^2] \text{diag}Q;$$

其中  $\|h_j(i)\|^2$  为  $H_i$  的第  $j$  个列向量的长度(范数)的平方。于是(11)式成为

$$y_i = [\|h_1(i)\|^2, \dots, \|h_n(i)\|^2] \text{diag}Q + \varepsilon_i, \quad i = k, \dots, k+N-1 \quad (11')$$

记

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \varepsilon_{k+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k+N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \|h_1(k)\|^2 & \|h_2(k)\|^2 & \cdots & \|h_n(k)\|^2 \\ \|h_1(k+1)\|^2 & \|h_2(k+1)\|^2 & \cdots & \|h_n(k+1)\|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \|h_1(k+N-1)\|^2 & \cdots & \cdots & \|h_n(k+N-1)\|^2 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \text{diag}Q + \mathcal{E} \quad (12)$$

于是

$$(\widehat{\text{diag}Q}) = (\mathcal{X}^T \mathcal{X})^{-1} \mathcal{X}^T \mathcal{Y} \quad (13)$$

这样, 形式上得到了  $Q$  的估计, 但上述结果不是可运算的公式。因为在  $y_{k+1}$  中含有  $P_{k/k}$ , 它与  $Q$  的取值有关, 即  $y_{k+1} = y_{k+1}(Q)$ 。同样,  $y_{k+2}, \dots, y_{k+N-1}$  也有这个问题。为了使 (13) 成为可运算的, 我们运用迭代方法: 取前一个观测段的  $Q$  值作为迭代初始, 计算  $y_{k+1}, \dots, y_{k+N-1}$ ; 于是由 (13) 式可得  $\widehat{\text{diag}Q}$

Q, 记它为diagQ<sup>(1)</sup>. 重新计算 y<sub>k+1</sub>, ..., y<sub>k+N-1</sub>, 由此又获得diagQ, 记作diagQ<sup>(2)</sup>. 重复地运用迭代, 直至得到稳定的 Q 的估值。

## 2 自适应衰减记忆滤波

当动力学模型的误差较大时, 人们总是运用衰减记忆滤波方法。这种方法注重了当前观测信息的作用而减弱老数据的作用, 因此缩小了预报的作用, 从而构成自适应滤波。然而, 衰减因子的选择以及自适应的水平均缺乏足够的论证。这里, 我们以 T. Tarn 和 J. Zaborsky<sup>[3]</sup>的方法以及 Fagin 的指数因子衰减记忆方法作一点思考。文[3]中的滤波方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_{k/k} = \dot{X}_{k/k-1} + K_k \nu_k, & \nu_k = Z_k - H_k \dot{X}_{k/k-1} \\ K_k = P_{k/k-1} H_k^T [H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \\ \dot{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \dot{X}_{k-1/k-1} \\ P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} (S P_{k-1/k-1}) \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}, & S > 1 \\ P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \end{cases} \quad (14)$$

其中 S 为衰减因子。S 的选择可用更新序列 {ν<sub>k</sub>} 的性质确定。事实上, 运用(14)滤波时,

$$E[\nu_k \cdot \nu_k^T] = H_k (\Phi_{k,k-1} S P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}) H_k^T + R_k \quad (15)$$

因此

$$E[\nu_k^T \nu_k] = \text{tr}[H_k (\Phi_{k,k-1} S P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}) H_k^T + R_k] \quad (16)$$

如果以

$$\bar{\nu}_k^T \nu_k = \text{tr}[H_k (\Phi_{k,k-1} S P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}) H_k^T + R_k] \quad (17)$$

作为自适应滤波的一种约束, 则 S 的自适应估计为

$$S = \frac{\bar{\nu}_k^T \nu_k - \text{tr}[H_k Q_{k-1} H_k^T + R_k]}{\text{tr}(H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + H_k^T)} \quad (18)$$

这样确定的 S 与 K 有关。

这种衰减记忆滤波的物理景象是: 当 Kalman 滤波至时刻 t<sub>k-1</sub> 时, 如果发现滤波异常, 那末往后的滤波原动力学模型已不适应当前的滤波。为此采用重视当前观测数据的方法, 使历史信息的作用减弱。因此在 t<sub>k-1</sub> 时刻的估值误差方差阵 P<sub>k-1/k-1</sub> 乘以因子 S (S > 1), 使预报估值的方差阵 P<sub>k/k-1</sub> 增大, 从而使 K<sub>k</sub> 增大, 使滤波成为适应的。

当我们进一步考察衰减滤波的性能时, 上述这种确定衰减因子的方法并不是一种严密的方法。例如这种自适应滤波的置信程度如何? 而 S 的确定也太工程化。事实上, 我们知道, 如果 t<sub>k-1</sub> 时刻滤波正常的话, 应有

$$\text{Var}(\nu_k) = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k$$

如果 t<sub>k-1</sub> 时刻滤波为异常, 则将上式改为(15), 我们记作

$$\text{Var}(\nu_k)_1 = H_k (\Phi_{k,k-1} S P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}) H_k^T + R_k$$

希望这种修改将出现适应性滤波, 对这种滤波来说, 应有

$$\chi_m^2(k) \triangleq \bar{\nu}_k^T (\text{Var}(\nu_k)_1)^{-1} \nu_k \sim \chi_m^2$$

于是在置信水平 α (置信度为 1-α) 之下, 应有

$$\chi_m^2(k) \leq x_\alpha^2$$

即

$$\bar{\nu}_k^T [H_k (\Phi_{k,k-1} S P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}) H_k^T + R_k]^{-1} \nu_k \leq x_\alpha^2 \quad (19)$$

将它作为 S 取值的一种自适应约束。为了作进一步思考, 将(19)进行必要的变换, 先给出如下引理。

### 引理<sup>[2]</sup>

记

$$A_k = H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T H_k^T, \quad B_k = H_k Q_{k-1} H_k^T + R_k$$

其中  $A_k, B_k$  均为对称正定阵, 则存在非奇异阵  $C_k$ , 使

$$C_k A_k C_k^T = I, \quad C_k B_k C_k^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} \triangleq \Lambda$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  为  $|B_k - \lambda A_k| = 0$  的根。此处  $C_k = \Gamma_k D_k$ ,  $D_k$  为  $A_k$  成为单位阵的非奇异阵, 即  $D_k A_k D_k^T = I$ 。

而  $\Gamma_k$  为使  $D_k B_k D_k^T$  成为对角阵的正交阵, 即  $\Gamma_k (D_k B_k D_k^T) \Gamma_k^T$  为对角阵。

由上述引理, (19) 式成为

$$v_k^T (S A_k + B_k)^{-1} v_k \leq x_0^2$$

由于  
故

$$A_k = C_k^T C_k^{-T}, \quad B_k = C_k^{-1} \Lambda C_k^{-T}$$

$$(S A_k + B_k)^{-1} = C_k^T (S I + \Lambda)^{-1} C_k$$

于是

$$v_k^T (S A_k + B_k)^{-1} v_k = v_k^T C_k^T (S I + \Lambda)^{-1} C_k v_k = (C_k v_k)^T (S I + \Lambda)^{-1} C_k v_k$$

$$\triangleq \xi_k^T (S I + \Lambda)^{-1} \xi_k$$

其中  $\xi_k = C_k v_k \triangleq [\xi_{k1}; \dots; \xi_{km}]^T$ , 于是

$$\xi_k^T \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{s + \lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{s + \lambda_m} \end{bmatrix} \xi_k \leq x_0^2$$

或者

$$\frac{\xi_{k1}^2}{s + \lambda_1} + \dots + \frac{\xi_{km}^2}{s + \lambda_m} \leq x_0^2 \quad (20)$$

由此可知, 满足 (20) 的  $s$  不是唯一的。记 (20) 式的左端为  $F(s)$ , 即

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\xi_{ki}^2}{s + \lambda_i}$$

于是  $F(s)$  是  $s$  的单调减少函数, 因此必有满足 (20) 的  $s$ , 且  $s > 1$ 。由近似解法, 可以得出使 (20) 式成为最小的大于 1 的  $s$  值, 即取  $s^*$ , 使

$$s^* = \inf_{s > 1} \left\{ s : \frac{\xi_{k1}^2}{s + \lambda_1} + \dots + \frac{\xi_{km}^2}{s + \lambda_m} \leq x_0^2 \right\} \quad (21)$$

以  $s^*$  作为  $s$  的自适应估计, 此时的  $s^*$  既可以使滤波精度降低到最小限度 (衰减记忆滤波的精度随  $s$  的增加而降低), 且滤波又是自适应的, 而且, 选择这样的  $s^*$ , 使自适应滤波的置信度保持在  $1 - \alpha$  的水平上。

Fagin 的衰减记忆滤波方法是对预报估计误差的方差阵  $P_{k|k-1}$  直接乘以指数函数  $e^{-\Delta t/\tau}$ ,  $\tau > 0, \Delta t = t_k - t_{k-1}$  为观测步长。此时滤波的增益阵 (记作  $\mathcal{K}_k^{(\tau)}$ ) 为

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k^{(\tau)} &= e^{-\Delta t/\tau} P_{k|k-1} H_k^T [H_k e^{-\Delta t/\tau} P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \\ &= P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + e^{-\Delta t/\tau} R_k]^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

因此 Fagin 衰减记忆的物理意义是有意提高观测的精度。致使滤波相信当前观测数据而衰减老数据的作用。与 Tarn 的方法有异曲同工之效。

$\tau$  的自适应估计完全可仿前进行。只需注意此时 (19) 式成为

$$v_k^T [H_k (e^{-\Delta t/\tau} P_{k|k-1}) H_k^T + R_k]^{-1} v_k \leq x_0^2$$

此时, 记  $A_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T, B_k = R_k$  则仍有 (20) 式, 只是其中的  $s$  改为  $e^{-\Delta t/\tau}$  而已。

### 3 关于模型噪声方差阵 $R_k$ , $Q_k$ 的自适应 Bayes-ML 估计方法

在论及  $R_k$  和  $Q_k$  的自适应估计时,总是设法建立递推的关系式,和状态同时估计,如 Myers 和 Tapley<sup>[4]</sup>,Abramson<sup>[5]</sup>等人的工作。如果在每一观测时刻都去作  $Q_k$ ,  $R_k$  的自适应估计,这将带来繁重的运算,在工程实践中似乎并没有这种必要。因此,总是给予某种假设,使之比较容易求解,又不失实际的应用意义。

这里先作一些思想方法上的研究,然后结合应用,作必要的简化,设法给出  $Q$ ,  $R$  的估计。

仍考虑下列模型

$$\begin{aligned} X_k &= \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + W_{k-1} \\ Z_k &= H_kX_k + V_k \end{aligned}$$

关于模型的基本假设同前。记  $\mathcal{Z}^{(k)} = \{z_1, \dots, z_k\}$ , 在  $X_0, W_k, V_k$  为正态的场合,一般地,可运用 ML 方法给出  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1}, R_1, R_2, \dots, R_k$  的估计。原则上说,只要写出似然函数  $P(\mathcal{Z}^{(k)} / Q_0, \dots, Q_{k-1}, R_1, \dots, R_k)$  且求它关于  $Q_i, R_j (i=0, 1, \dots, k-1, j=1, \dots, k)$  的极大值就可以了。但是这种“毕其功于一役”的做法,将会遇到运算上的麻烦,而且要估计的未知参数太多,工作量太大,也看不出运算规律。因此,从思想方法上需要讲究,应另辟蹊径。

首先,我们运用似然函数  $P(\mathcal{Z}^{(k)} | Q_{k-1}, R_k)$  来代替  $P(\mathcal{Z}^{(k)} | Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1}, R_1, \dots, R_k)$ , 即是说,用观测集  $\mathcal{Z}^{(k)}$  来估计  $Q_{k-1}, R_k$ , 而且希望估计是序贯地进行的。具体地说,利用  $P(\mathcal{Z}^{(1)} / Q_0, R_1)$  来估计  $Q_0, R_1$ ; 此后,当获得  $\mathcal{Z}^{(2)} = \{Z_1, Z_2\} = \{\mathcal{Z}^{(1)}, Z_2\}$  之后,再利用  $P(\mathcal{Z}^{(2)} / Q_1, R_2)$  去估计  $Q_1, R_2$ , 循此方法,直到时刻  $t_k$ , 就去估计出  $Q_{k-1}, R_k$ 。因此,估计是有序地进行的。这种思考如能实现,那未在运算上是方便的。不过,我们看到,要去估计矩阵的元,这并不是轻而易举的事。

为此,对于  $P(\mathcal{Z}^{(k)} / Q_{k-1}, R_k)$ , 运用条件分布来表示:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{Z}^{(k)} / Q_{k-1}, R_k) &= P(\mathcal{Z}^{(k-1)}, Z_k / Q_{k-1}, R_k) \\ &= P(Z_k / \mathcal{Z}^{(k-1)}; Q_{k-1}, R_k) P(\mathcal{Z}^{(k-1)} / Q_{k-1}, R_k) \\ &= P(Z_k / \mathcal{Z}^{(k-1)}; Q_{k-1}, R_k) \cdot P(Z_{k-1} / \mathcal{Z}^{(k-2)}; Q_{k-1}, R_k) \\ &\quad \cdot P(\mathcal{Z}^{(k-2)} / Q_{k-1}, R_k) \\ &= \prod_{j=2}^k P(Z_j / \mathcal{Z}^{(j-1)}; Q_{k-1}, R_k) P(Z_1 / Q_0, R_1) \end{aligned} \quad (23)$$

今确定在  $\mathcal{Z}^{(j-1)}$  给定之下,  $Z_j$  的条件分布 ( $Q_{k-1}, R_k$  当作已知时)。注意

$$\begin{aligned} E[Z_j / \mathcal{Z}^{(j-1)}] &= E[H_j \bar{X}_j + V_j / \mathcal{Z}^{(j-1)}] \\ &= H_j \bar{X}_{j,j-1}, j = 2, \dots, k \\ \text{Var}(Z_j / \mathcal{Z}^{(j-1)}) &= E[(H_j \bar{X}_{j,j-1} + V_j)(H_j \bar{X}_{j,j-1} + V_j)^T / \mathcal{Z}^{(j-1)}] \\ &= H_j P_{j,j-1} H_j^T + R_j \triangleq S_{j,j-1}, j = 2, \dots, k \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad P(Z_j / \mathcal{Z}^{(j-1)}; Q_{k-1}, R_k) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |S_{j,j-1}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} Z_j^T S_{j,j-1}^{-1} Z_j} \quad (24)$$

其中

$$\bar{X}_{j,j-1} = Z_j - H_j \bar{X}_{j,j-1} = Z_j - H_j \Phi_{j,j-1} \bar{X}_{j-1,j-1}$$

再看(23)中的  $P(Z_1 / Q_0, R_1)$ , 此时无观测,但有验前信息  $(\bar{X}_0, P_0)$ 。只要注意  $Z_1 = H_1 X_1 + V_1$ , 于是

$$\begin{aligned} E[Z_1 / \mathcal{Z}^{(0)}] &= H_1 \Phi_{1,0} \bar{X}_{0,0} = H_1 \bar{X}_{1,0} \\ \text{Var}(Z_1 / \mathcal{Z}^{(0)}) &= H_1 P_{1,0} H_1^T + R_1 \triangleq S_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad P(Z_1 / Q_0, R_1) &= P(Z_1 / \mathcal{Z}^{(0)}; Q_0, R_1) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |S_1|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} Z_1^T S_1^{-1} Z_1} \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\tilde{Z}_1 = Z_1 - H_1 \hat{X}_{1/0}$

将(24),(25)代入(23),则有

$$P(\mathcal{Z}^{(k)} | Q_{k-1}, R_k) = C \prod_{j=2}^k |S_{j,j-1}|^{-\frac{1}{2}} |S_1|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} [Z_{j,j-1}^T S_{j,j-1}^{-1} Z_{j,j-1} + Z_1^T S_1^{-1} Z_1]} \quad (26)$$

下面用序贯方法作出  $Q, R$  的最大似然(ML)估计。

$k$  从 1 开始,  $k=1$  时, 有观测值  $Z_1$ , 此时

$$P(Z^{(1)} | Q_0, R_1) = P(Z_1 | Q_0, R_1) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} |S_1|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} Z_1^T S_1^{-1} Z_1}$$

其中  $\tilde{Z}_1 = Z_1 - H_1 \hat{X}_{1/0} = Z_1 - H_1 \Phi_{1,0} \hat{X}_{0,0}$ ,  $S_1 = \text{Var}(Z_1 | \mathcal{Z}^{(0)}) = H_1 P_{1/0} H_1^T + R_1$

此处  $P_{1/0} = \Phi_{1,0} P_{0/0} \Phi_{1,0}^T + Q_0$

此时  $P(Z_1 | Q_0, R_1)$  就是似然函数  $L(Z_1; Q_0, R_1)$ , 令

$$\frac{\partial \ln L}{\partial R_1} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial Q_0} = 0$$

设法解得  $\hat{Q}_0, \hat{R}_1$ . 这样, 在  $t_1$  时刻可进行 Kalman 滤波的正常运算, 可算得  $\hat{X}_{1/1}$  及  $P_{1/1}$ .

令  $k=2$ , 此时  $Q_0$  取  $\hat{Q}_0$ ,  $R_1$  取  $\hat{R}_1$ , 而

$$P(\mathcal{Z}^{(2)} | Q_1, R_1) = C |S_{2,1}|^{-\frac{1}{2}} |S_1|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} [Z_{2,1}^T S_{2,1}^{-1} Z_{2,1} + Z_1^T S_1^{-1} Z_1]}$$

其中  $S_{2,1} = H_2 P_{2,1} H_2^T + R_2$ ,  $P_{2,1} = \Phi_{2,1} P_{1/1} \Phi_{2,1}^T + Q_1$ ,  $\tilde{Z}_{2,1} = Z_2 - H_2 \Phi_{2,1} \hat{X}_{1/1}$

式中的  $P_{1/1}$  及  $\hat{X}_{1/1}$  已由  $t_1$  时刻的滤波获得。令

$$\frac{\partial \ln P(\mathcal{Z}^{(2)} | Q_1, R_1)}{\partial R_2} = 0, \quad \frac{\partial \ln P(\mathcal{Z}^{(2)} | Q_1, R_1)}{\partial Q_1} = 0$$

解得估值  $\hat{R}_2, \hat{Q}_1$ . 于是又可以在  $t_2$  时刻进行滤波, 获得  $(\hat{X}_{2/2}, P_{2/2})$ . 序贯地用上述方法, 以获得  $Q_{k-1}, \hat{R}_k$ , 从而  $(\hat{X}_{k/k}, P_{k/k})$ .

我们来给出具体的  $\hat{Q}_{k-1}$  和  $\hat{R}_k$  所要满足的关系式。

当递推运算已经进行了  $k-1$  步时, 此时  $\hat{Q}_{k-2}, \hat{R}_{k-1}, \dots, \hat{Q}_0, \hat{R}_1$  已经获得, 改写  $P(\mathcal{Z}^{(k)} | Q_{k-1}, R_k)$  为

$$P(\mathcal{Z}^{(k)} | Q_{k-1}, R_k) = C \prod_{j=2}^{k-1} |S_{j,j-1}|^{-\frac{1}{2}} |S_1|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} [Z_{j,j-1}^T S_{j,j-1}^{-1} Z_{j,j-1} + Z_1^T S_1^{-1} Z_1]} \\ \cdot |S_{k,k-1}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} Z_{k,k-1}^T S_{k,k-1}^{-1} Z_{k,k-1}}$$

或者

$$\ln P(\mathcal{Z}^{(k)} | Q_{k-1}, R_k) = \ln L(\mathcal{Z}^{(k)}; Q_{k-1}, R_k) \\ = -\frac{1}{2} (\ln |S_{k,k-1}| + \tilde{Z}_{k,k-1}^T S_{k,k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k,k-1}) + \mathcal{H} \quad (27)$$

式中  $\mathcal{H}$  为与  $Q_{k-1}, R_k$  无关的项, 而

$$S_{k,k-1} = H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_k, \quad P_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$$

在将(27)式关于  $Q_{k-1}$  及  $R_k$  求偏导数时, 需要用到下列公式<sup>[1]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}(AX^{-1}) = -(X^{-1}AX^{-1})^T, \quad \frac{\partial}{\partial X} \ln |X + D| = X^{-1}$$

于是

$$\frac{\partial \ln L(\mathcal{Z}^{(k)}; Q_{k-1}, R_k)}{\partial R_k} = -\frac{1}{2} \left( S_{k/k-1}^{-1} + \frac{\partial}{\partial R_k} \tilde{Z}_{k,k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k,k-1} \right) \quad (28)$$

而

$$\frac{\partial}{\partial R_k} (\tilde{Z}_{k,k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k,k-1}) = \frac{\partial}{\partial R_k} \text{tr}(\tilde{Z}_{k,k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k,k-1}) \\ = \frac{\partial}{\partial R_k} \text{tr}(\tilde{Z}_{k,k-1} \cdot \tilde{Z}_{k,k-1}^T \cdot S_{k/k-1}^{-1}) = -S_{k/k-1}^{-1} (\tilde{Z}_{k,k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T) S_{k/k-1}^{-1} \cdot I$$

令(28)式等于 0, 则有

$$S_{k/k-1}^{-1} - S_{k/k-1}^{-1} \cdot \tilde{Z}_{k,k-1} Z_{k/k-1}^T \cdot S_{k/k-1}^{-1} = 0$$

$$S_{k/k-1} - \tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T = 0$$

于是

$$H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k - \tilde{Z}_{k/k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T = 0 \quad (29)$$

即

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (30)$$

其中

$$\text{其次, 令 } \partial \ln L(\mathcal{Z}^{(k)}; Q_{k-1}, R_k) / \partial Q_{k-1} = 0, \text{ 即}$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} (\ln |S_{k/k-1}| + \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k/k-1}) = 0 \quad (31)$$

$$\text{其中 } S_{k/k-1} = H_k Q_{k-1} H_k^T + (H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T H_k^T + R_k)$$

下面逐一计算(31)式中的偏导数。

$$\frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} [\ln |S_{k/k-1}|] = \frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} [\ln |H_k Q_{k-1} H_k^T + B_k|]$$

式中  $B_k$  不含有  $Q_{k-1}$ :

$$B_k = H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T H_k^T + R_k$$

记  $Q(k-1) = (q_{ij}(k-1))_{i,j=1,\dots,n}$  为方便起见, 记  $q_{ij}(k-1)$  为  $q_{ij}$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_{ij}} \ln |S_{k/k-1}| &= \text{tr} \left[ S_{k/k-1}^{-1} \cdot \frac{\partial S_{k/k-1}}{\partial q_{ij}} \right] = \text{tr} \left[ S_{k/k-1}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial q_{ij}} (H_k Q_{k-1} H_k^T) \right] \\ &= \text{tr} \left[ S_{k/k-1}^{-1} \cdot H_k \cdot \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial q_{ij}} H_k^T \right] = \text{tr} [S_{k/k-1}^{-1} \cdot H_k E_{ij} H_k^T] \end{aligned}$$

其中  $E_{ij}$  为  $(i, j)$  元为 1, 其余为 0 的  $n \times n$  矩阵。由关系式

$$\text{tr}(CE_n D) = (DC)_{ij}$$

$$\text{tr}[(S_{k/k-1}^{-1} H_k) E_{ij} H_k^T] = (H_k^T \cdot S_{k/k-1}^{-1} H_k)_{ij}$$

$$\text{因此 } \frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} [\ln |S_{k/k-1}|] = (H_k^T S_{k/k-1}^{-1} H_k)^T = H_k^T S_{k/k-1}^{-1} H_k \quad (32)$$

再计算(31)中的第三个偏导数:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} [\tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k/k-1}] \\ &= \frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} \text{tr}[(\tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T) \cdot S_{k/k-1}^{-1}] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial q_{ij}} \text{tr}[\tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1}] \right)_{i,j=1,\dots,n} \end{aligned}$$

注意到关系式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial q_{ij}} \text{tr}[(\tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T) \cdot S_{k/k-1}^{-1}] = \text{tr} \left[ (\tilde{Z}_{k/k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T) \cdot \frac{\partial S_{k/k-1}^{-1}}{\partial q_{ij}} \right] \\ &= \text{tr} \left[ \tilde{Z}_{k/k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T \cdot S_{k/k-1}^{-1} \cdot \frac{\partial S_{k/k-1}}{\partial q_{ij}} \cdot S_{k/k-1}^{-1} \right] \\ &= - \text{tr} [(\tilde{Z}_{k/k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} \cdot H_k) E_{ij} (H_k^T \cdot S_{k/k-1}^{-1})] \\ &= - [(H_k^T S_{k/k-1}^{-1}) \cdot \tilde{Z}_{k/k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T \cdot S_{k/k-1}^{-1} \cdot H_k]_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } &\frac{\partial}{\partial Q_{k-1}} \text{tr}[(\tilde{Z}_{k/k-1} \cdot \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1})] \\ &= - (H_k^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} H_k)^T = - H_k^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} H_k \quad (33) \end{aligned}$$

将(32),(33)式代入(31), 则有

$$H_k^T S_{k/k-1}^{-1} H_k - H_k^T S_{k/k-1}^{-1} \tilde{Z}_{k/k-1} \tilde{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1} H_k = 0$$

其中

$$S_{k/k-1} = H_k Q_{k-1} H_k^T + H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T H_k^T + R_k,$$

于是有

$$H_k^T [S_{k/k-1}^{-1} - S_{k/k-1}^{-1} \bar{Z}_{k/k-1} \cdot \bar{Z}_{k/k-1}^T S_{k/k-1}^{-1}] H_k = 0$$

或

$$H_k^T [I_m - S_{k/k-1}^{-1} \bar{Z}_{k/k-1} \cdot \bar{Z}_{k/k-1}^T] S_{k/k-1}^{-1} H_k = 0$$

上式对  $\forall H_k$  均有同一表达形式, 因此

$$I_m - S_{k/k-1}^{-1} \bar{Z}_{k/k-1} \cdot \bar{Z}_{k/k-1}^T = 0$$

即

$$S_{k/k-1} - \bar{Z}_{k/k-1} \bar{Z}_{k/k-1}^T = 0$$

即

$$H_k Q_{k-1} H_k^T + H_k \Phi_{k,k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k,k-1}^T H_k^T + R_k - \bar{Z}_{k/k-1} \cdot \bar{Z}_{k/k-1}^T = 0 \quad (34)$$

上式与 (29) 式具有相同的形式。由此, 我们知道, 当  $R_k, Q_{k-1}$  均为未知时, 用 ML 方法不可能同时给出  $Q_{k-1}$  和  $R_k$  的估计。如果它们之中有一个为已知, 例如  $Q_{k-1}$  为已知, 那末  $R_k$  即可由 (29) 式获得。如果  $R_k$  为已知, 则由 (34), 只有当  $m \geq n$  时, 才有可能解出  $Q_{k-1}$ , 否则没有唯一的解。

考虑到工程实践中应用的需要, 仍讨论  $Q_{k-1}$  为对角阵时, 当  $R_k$  为已知时的  $Q_{k-1}$  的估计方法。这种估计恰好与第 2 节的情形相吻合。此时  $Q_{k-1}$  的估计由 (10) 式给出。那里的新息  $v_k$  就是我们这里的  $\bar{Z}_{k/k-1}$ 。

上述  $Q_{k-1}$  的估计是在 ML 估计的基础上又运用 LS 估计而得到的, 因此与第 2 节的思想方法不同。由于  $Q$  的估计由递推形式而获得, 因此在计算上是容易实现的。

## 4 示例——仿真计算及其分析

这里, 举例说明在动力学模型具有较大误差情况下, 所提供方法的自适应能力。

假设对飞行器的高度实行跟踪滤波。飞行器以等速率  $\alpha$  升高, 但我们误认为是以等高飞行。于是假设动力学模型为

$$x_k = x_{k-1}$$

此处  $x_k$  表示  $t_k$  时刻的高度。观测模型为  $Z_k = x_k + v_k$ 。

其中  $v_k \sim N(0, \sigma^2)$ 。如果起始时刻无验前信息可利用, 此时  $x_k$  的滤波值就是观测的均值  $\hat{x}_{k/k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_i$ ,

而  $P_{k,k} = \frac{\sigma^2}{n}$ 。由于真实的动力学模型是  $x_k^* = x_{k-1}^* + \alpha, k=1, 2, \dots$ , 可知真实的估值误差为,  $\Delta x_k^* \triangleq \hat{x}_{k/k} - x_k^* = \frac{k-1}{2} \alpha - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n v_i$ 。于是  $E[\Delta x_k^*] = \frac{k-1}{2} \alpha$ 。它随着时间的增长而越来越大, 因此在错误模型下滤波是发散的。

今用十次模拟观测数据进行仿真滤波计算。观测步长为一秒, 且  $v_k \sim N(0, 1)$ 。数据如下表

表 1

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Z_i$	12.579	13.090	10.448	13.544	15.960	15.509	17.219	17.931	20.096	21.239

下面分别以衰减记忆滤波和  $Q_k$  的 ML 递推自适应估计为例, 分别说明衰减因子  $S$  的确定和  $Q_k$  的估计方法, 并分析滤波的自适应性。

### 4.1 衰减记忆滤波中 $S$ 的确定及自适应性

在错误的动力学模型之下, 当运用衰减记忆滤波时, 只要选衰减因子  $S > 1$ , 则控制了滤波的发散<sup>[3]</sup>

今用第 3 节的方法给出  $S$  的自适应估计。我们知道, 在给置信水平  $\alpha$  之下, (19) 式成为

$$v_k' (S P_{k-1} + \sigma^2)^{-1} v_k \leq x_\alpha^2$$

即

$$(Z_k - \hat{x}_{k-1})^2 (S P_{k-1} + \sigma^2)^{-1} \leq x_\alpha^2$$

其中  $\hat{x}_{k-1}$  为  $t_{k-1}$  时刻  $x_{k-1}$  的滤波值,  $P_{k-1}$  为其方差,  $x_0^2$  为  $x_0^2$  的上侧分位数, 因此

$$S \geq \left[ \frac{(Z_k - \hat{x}_{k-1})^2}{x_0^2} - \sigma^2 \right] / P_{k-1} \quad (35)$$

如果取  $\alpha=0.05$ , 则  $x_0^2=3.841$ . 因此, 如果在  $t_{k-1}$  时刻滤波为异常时, 可取衰减因子  $s^*$ :

$$s^* = \inf_{s \geq 1} \{s; s \geq [(Z_k - \hat{x}_{k-1})^2 / x_0^2 - \sigma^2] / P_{k-1}\} \quad (36)$$

以  $s^*$  作为衰减因子, 往后的滤波用衰减记忆方法。在前面的例中, 在错误的动力学模型之下, 用 Kalman 滤波时, 在  $t_k$  时刻可发现滤波是异常的<sup>[2]</sup>。为此, 按 (36), 可取  $s^*=4.1354$ , 往后用衰减记忆滤波。例如, 在  $t_k$  时

$$\hat{x}_5 = \hat{x}_4 + \frac{s^* P_4}{s^* P_4 + 1} (Z_5 - \hat{x}_4) = 14.5858$$

如果不用衰减记忆滤波, 此时的  $\hat{x}_5=13.724$ , 而真实的高度为 15. 由此可以看出衰减记忆滤波改进了 Kalman 滤波的性质。衰减记忆滤波值的均方误差为  $P_4=0.5083$ . 如果取  $s > s^*$  作衰减记忆滤波, 此时滤波值的均方误差将大于 0.5083 (例如取  $s=5$ , 此时的  $P_4=0.5556$ ). 这里可以看出, 取  $s^*=4.1354$ , 不但使衰减记忆滤波为自适应的, 且它的均方误差较之其他的  $s (s > s^*)$  所对应的滤波的均方误差为小。

#### 4.2 $Q_k$ 补偿的 ML 递推估计方法

今对错误的动力学模型引入噪声项, 此时

$$x_k = x_{k-1} + w_{k-1} \quad (37)$$

但  $w_{k-1}$  的方差  $Q_{k-1}$  为未知。我们采用 ML 递推估计  $Q_{k-1}$  的方法以构成自适应滤波, 此时, (34) 式成为

$$Q_{k-1} = (\tilde{Z}_{k/k-1})^2 - (P_{k-1} + \sigma^2)$$

此处  $\tilde{Z}_{k/k-1} = Z_k - \hat{x}_{k-1}$ . 假定观测前无验前信息, 此时滤波从  $k=2$  开始, 而  $k=1$  时的滤波值及其方差作为验前信息使用, 当  $k=1$  时, 我们取  $\hat{x}_{1/1} = Z_1, P_{1/1} = \sigma^2$ . 用第 4 节的方法, 可得如下计算结果如表 2.

表 2

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
运用模型 (34) 时的滤波值 $\hat{x}_k$	12.579	12.835	13.039	13.165	13.724	14.022	14.478	14.910	15.480	16.060
运用模型 (37) 时 $Q_k$ 的 ML 估计	0	0	0	4.5870	0	1.7285	0.02286	7.2356	0.3159	
$Q_k$ 补偿的滤波值 $\hat{x}_{k/k}$	12.579	12.835	13.039	13.165	15.4812	15.4938	16.6393	17.1572	19.7557	20.5648
$E[(\hat{x}_{k/k} - x_k)^2] = P_{k/k}$	1	1/2	1/3	1/4	0.8286	0.2478	0.6465	0.4009	0.8843	0.5455

其图形表示如图 1. 图中:  $\times$  为观测值;  $\Delta$  为模型  $x_k = x_{k-1}$  之下的高度估计;  $*$  为模型 (37) 之下  $Q_k$  补偿后的高度估计。

由图可以看出,  $Q_k$  补偿后的高度估计“锁”在真实飞行轨迹的近旁, 它改善了错误模型之下的高度估计, 且控制了滤波发散。

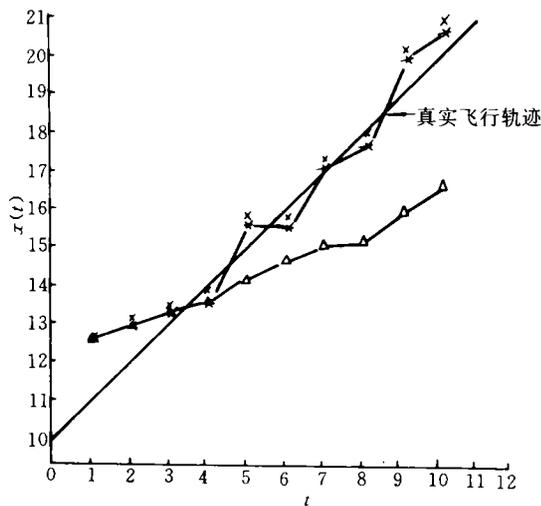


图 1

## 参 考 文 献

- 1 张金槐. 线性模型参数估计及其改进. 长沙: 国防科技大学出版社, 1992
- 2 张金槐等. 飞行器试验统计学 (下册). 长沙: 国防科技大学出版社, 1984 年
- 3 T. Trn, JZaborsky. A practical non-diverging filter. AIAA Jour. 1970, 8
- 4 K A Myers, B D Tapley. Adaptive Sequential Estimation with unknown noise Statistics. IEEE Tran vol. AC-21, 1976
- 5 P D Jr Abramson. Simutaneous Estimation of the State and Noise Statistics in Liar Dynamic Systems. MIT TE-25, 10, may, 1968
- 6 C T Leondes, J O Pearson. A Survey of Kalman Filtering of Systems with Parameter Uncertainties. IEEE AC-vol. 17, 1973

### Some Thoughts on Adaptive Filtering Technique

Zhang Jinhuai

(Department of Automatic Control)

#### Abstract

This paper discusses the exceptional phenomeina for using kalman filter in usual engineering practice. At first, we start from detection of the anomaly of filtering to construct the algorithm for adaptive setimation. Then, for decay mamory filtering, We give an adaptive estimation of decay factor. About the dynamic model and observational model with unknown noise statistics, We design ML-estimation with recursive algorithm. Some approaches of constructing adaptive filtering are also considered at the same time.

**key words** kalman Filter, adaptive filtering

---

(上接 86 页)

### Zero Roll-Rate and Impact Dispersion of Ballistic Re-entry Missiles

Huang Zhengui

(Department of Automatic Control)

#### Abstract

One of the greatest impact dispersion is caused by zero roll-rate for spinning missiles during their re-entry flights. The mechanism of roll-rate through zero is analysed. The altitude of zero roll-rate for including roll damping influence and the impact dispersion as a result of zero roll-rate are formulaed. Finally, we compare six degrees of freedom simulation results of ballistic re-entry missiles motion with the computing results of approximate formula. The comparison shows the feasibility of the approximate analysis.

**Key works** spinning re-entry, trim state, zero roll-rate altitude, impact dispersion