

H面双填充介质金属方波导的本征模*

凌根深 刘永贵

(国防科技大学应用物理系 长沙 410073)

摘要 通过求解H面双填充介质金属方波导中位函数的亥姆霍兹方程, 得到系统的电磁波的本征模函数及本征值方程, 其本征模为LSE模或LSM模, 并给出了色散关系的数值解。

关键词 H面双填充介质; 方波导; 本征模

分类号 O432.12

慢波结构自由电子激光(FEL)因具有用低能电子束产生高增益、高效率、短波长相干辐射的特点^{[1]~[4]}, 而得到广泛的研究, 各种慢波系统如平板型^{[2][3]}、圆柱型^{[1][3][5]}、填充等离子体型^{[1][5]}等被广泛用于FEL中。本文通过求解H面双填充介质金属方波导中位函数的亥姆霍兹方程, 研究该系统的本征模的特点。

1 LSE模

在金属方波导的H面上填充厚度为 t , 相对介电常数为 ϵ_r , 相对磁导率为1的介质。坐标系统如图1。其本征模通常是LSE模或LSM模(即对 y 轴的横电模或横磁模)^{[6]~[8]}, 本文将推导LSE模, 并给出LSM模的结果。

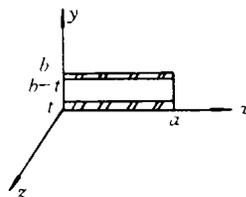


图1 慢波系统

对LSE模, 其位函数满足标量亥姆霍兹方程,

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1)$$

其中 $k^2 = \mu \epsilon \omega^2$, 为电磁波的波数, ω 为其角频率。对沿正 z 方向传播的波有

$$A = a_z \phi(x, y) e^{-jk_z z} = a_z \phi \quad (2)$$

其中 ϕ 为标量电位, k_z 为 z 方向的波数。场的各分量为

$$\begin{cases} E_x = \frac{\partial \phi}{\partial z}, & H_x = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ E_y = 0, & H_y = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi \right) \\ E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, & H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \end{cases} \quad (3)$$

* 1994年2月10日收稿

以下将利用场在波导中的边界条件和在介质交界面上的连续条件求解(1)式确定的本征模问题。分三个区讨论,将各区的位函数(2)代入(1)可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x,y)}{\partial y^2} + k_1^2 \phi_1(x,y) = 0, & 0 \leq y \leq t \\ \frac{\partial^2 \phi_2(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x,y)}{\partial y^2} + k_1^2 \phi_2(x,y) = 0, & t \leq y \leq b-t \\ \frac{\partial^2 \phi_3(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_3(x,y)}{\partial y^2} + k_1^2 \phi_3(x,y) = 0, & b-t \leq y \leq t \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} k_1^2 = \omega \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r - k_z^2 = k_0^2 \epsilon_r - k_z^2 \\ k_1^2 = k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = k_z^2 - k_0^2 \end{cases} \quad (5)$$

以及 $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ 为空气中的波数。

利用分离变量法,令

$$\phi_i(x,y) = X_i(x)Y_i(y), \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

代入(5)式得

$$\begin{cases} \frac{1}{X_n(x)} \frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_{11}^2, & \frac{1}{Y_n(y)} \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} = -k_{12}^2, n = 1, 3 \\ \frac{1}{X_2(x)} \frac{d^2 X_2(x)}{dx^2} = -k_{21}^2, & \frac{1}{Y_2(y)} \frac{d^2 Y_2(y)}{dy^2} = -k_{22}^2 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $k_{11}^2 + k_{12}^2 = k_1^2$, $k_{21}^2 + k_{22}^2 = k_1^2$, k_{11} , k_{12} 分别为 LSE 模在介质中 x 和 y 方向上的波数, k_{21} , k_{22} 分别为 LSE 模在空气中 x 和 y 方向上的波数。(7)式的通解为

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = (A_{11} \cos k_{11}x + A_{12} \sin k_{11}x)(B_{11} \cos k_{12}y + B_{12} \sin k_{12}y) \\ \phi_2(x,y) = (A_{21} e^{-k_{21}y} + A_{22} e^{k_{21}y})(B_{21} e^{-k_{22}y} + B_{22} e^{k_{22}y}) \\ \phi_3(x,y) = (A_{31} \cos k_{11}x + A_{32} \sin k_{11}x)(B_{31} \cos k_{12}y + B_{32} \sin k_{12}y) \end{cases} \quad (8)$$

利用场在波导壁上切向电场为零的条件,(8)式化为

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = A \cos \frac{m\pi}{a} x \sin k_{12}y \\ \phi_2(x,y) = \sin \frac{m\pi}{a} x (B_{21} e^{-k_{22}y} + B_{22} e^{k_{22}y}) \\ \phi_3(x,y) = C \cos \frac{m\pi}{a} x \sin k_{12}(b-y) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $k_{11} = \frac{m\pi}{a}$, $k_{21} = j \frac{m\pi}{a}$, $m = 1, 2, 3$, 分别为场在介质和空气中沿 x 方向的波数。利用场在交界面上切向电场、磁场连续条件,(9)式化为

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = A \cos \frac{m\pi}{a} x \sin k_{12}y \\ \phi_2(x,y) = B \sin \frac{m\pi}{a} x \left(e^{-k_{22}y} + \frac{1}{\alpha} e^{k_{22}y} \right) \\ \phi_3(x,y) = C \cos \frac{m\pi}{a} x \sin k_{12}(b-y) \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\alpha = e^{2k_{22}t} \left(\frac{k_{22}}{k_{12}} \operatorname{tg} k_{12}t - 1 \right) / \left(1 + \frac{k_{22}}{k_{12}} \operatorname{tg} k_{12}t \right) \quad (11)$$

以及

$$\frac{k_{22}}{k_{12}} \operatorname{tg} k_{12}t = \frac{\alpha + e^{2k_{22}(b-t)}}{\alpha - e^{2k_{22}(b-t)}} \quad (12a)$$

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + k_{12}^2 + k_z^2 = k_0^2 \epsilon_r \quad (12b)$$

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - k_{22}^2 + k_z^2 = k_0^2 \quad (12c)$$

式(12a)即为 H 面双填充介质金属波导 LSE 模的本征方程,在给定频率下与(12b)(12c)式联立求解可得一系列的本征值。LSE 模在空气中场的分量为

$$\begin{cases} E_x = -jk_z B \sin \frac{m\pi}{a} x \left(e^{-k_{22}y} + \frac{1}{\alpha} e^{k_{22}y} \right) e^{-jk_z z} \\ E_z = -\frac{m\pi}{a} B \cos \frac{m\pi}{a} x \left(e^{-k_{22}y} + \frac{1}{\alpha} e^{k_{22}y} \right) e^{-jk_z z} \\ H_x = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{m\pi}{a} k_{22} B \cos \frac{m\pi}{a} x \left(\frac{1}{\alpha} e^{k_{22}y} - e^{-k_{22}y} \right) e^{-jk_z z} \\ H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0} B (k_{22}^2 + k_0^2) \sin \frac{m\pi}{a} x \left(-e^{k_{22}y} + \frac{1}{\alpha} e^{k_{22}y} \right) e^{jk_z z} \\ H_z = -\frac{1}{\omega\mu_0} k_z k_{22} B \sin \frac{m\pi}{a} x \left(\frac{1}{\alpha} e^{k_{22}y} - e^{-k_{22}y} \right) e^{-jk_z z} \end{cases} \quad (13)$$

由(13)式可知,场通常是 E_z , H_z 同时存在,即其本征模式为 LSE 模或 LSM 模。当只填充一片介质(在 y 为 $(0, t)$ 内填充)时,(11)~(13)式将退化为(6)式中的结果。而文献[8]中类似情况下,均将 $\sin \frac{m\pi}{a} x$, $\cos \frac{m\pi}{a} x$ 作常数处理,由此可见我们的结果更普遍。同时,因电场没有 y 分量,电子束可靠近介质传输,有利于 FEL 运行。

图 2 为给定频率 k_0 时,各本征值(12)式对应于 k_0 的色散曲线,其中 $m=1$, $a=2.97$ cm, $b=1.2$ cm, $t=0.2$ cm, $\epsilon_r=2.4$, 分别对应于 LSE_{1n} 。

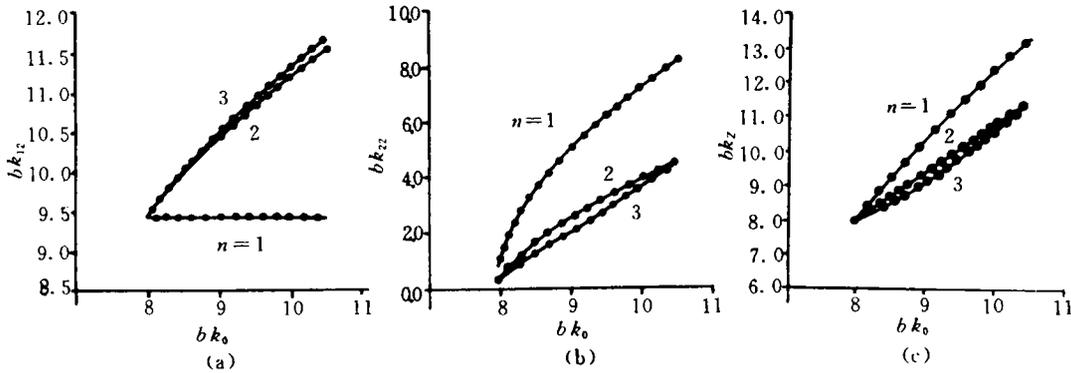


图 2 LSE_{1n} 模色散曲线

2 LSM 模

同理可得 LSM 模的位函数，场的表达式，本征方程等，其结果为
磁标量位为

$$\begin{cases} \phi_1(x, y) = A \sin \frac{m\pi}{a} x \cos k_{12} y \\ \phi_2(x, y) = B \cos \frac{m\pi}{a} x (e^{-k_{11}y} + \alpha' e^{k_{22}y}) \\ \phi_3(x, y) = C \sin \frac{m\pi}{a} x \cos k_{12} (b - y) \end{cases} \quad (14)$$

其中 $m=1, 2, 3, \dots$ 场在空气中的表达式为

$$\begin{cases} E_x = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{m\pi}{a} k_{22} B \sin \frac{m\pi}{a} x (\alpha' e^{k_{22}y} - e^{-k_{22}y}) e^{-jk_z z} \\ E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} (k_{22}^2 + k_0^2) B \cos \frac{m\pi}{a} x (e^{-k_{22}y} + \alpha' e^{k_{22}y}) e^{-jk_z z} \\ E_z = -\frac{1}{\omega\epsilon_0} k_z k_{22} B \cos \frac{m\pi}{a} x (\alpha' e^{k_{22}y} - e^{-k_{22}y}) e^{-jk_z z} \\ H_x = jk_z B \cos \frac{m\pi}{a} x (e^{-k_{22}y} + \alpha' e^{k_{22}y}) e^{-jk_z z} \\ H_z = -\frac{m\pi}{a} B \sin \frac{m\pi}{a} x (e^{-k_{22}y} + \alpha' e^{k_{22}y}) e^{-jk_z z} \end{cases} \quad (15)$$

其中， $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ ，色散方程为

$$\begin{cases} \frac{\epsilon_r k_{22}}{k_{12}} \operatorname{ctg} k_{12} t = \frac{1 + \alpha' e^{2k_{22}(b-t)}}{\alpha' e^{2k_{22}(b-t)} - 1} \\ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_{12}^2 + k_z^2 = k_0^2 \epsilon_r \\ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k_{22}^2 + k_z^2 = k_0^2 \end{cases} \quad (16)$$

其中，

$$\alpha' = e^{-2k_{22}t} \left(\frac{\epsilon_r k_{22}}{k_{12}} \operatorname{ctg} k_{12} t - 1 \right) / \left(1 + \frac{\epsilon_r k_{22}}{k_{12}} \operatorname{ctg} k_{12} t \right) \quad (17)$$

3 结论

(1) 由 (13) (15) 式可知，场中 E_z, H_z 是同时存在，所以该系统的本征模式为 LSE 模或 LSM 模。

(2) 对于给定频率 k_0, k_{12}, k_{22}, k_z 有一系列的本征模，对应于 $\text{LSE}_{mn}, \text{LSM}_{m,n}$ 。

(3) LSE_{11} 的 k_{12} 对 k_0 为常数，LSE 模无 y 方向电场分量，有利于电子束靠近介质表面传输，与场发生强相互作用，从而提高 FEL 相互作用效率。

参 考 文 献

- 1 凌根深等. 物理学报. 1993, 42 (10): 1595~1599
- 2 何一平等. 物理学报. 1993, 42 (6): 935~939
- 3 Ling Genshen 等. CHIN. Phys, LETT. 1993, 10 (10): 594~599
- 4 V K Tripathi, et al IEEE Trans. Plasma Sci, 1989, 17 (4): 583~587
- 5 H. Kosai, et al. IEEE Trans. Plasma Sci. 1990, 17 (4): 1002
- 6 杨铨让. 毫米波传输线. 北京: 电子工业出版社, 1986
- 7 Li G Chambers, et al. Brit Appl Phys, 1953, 4 (2): 39~45
- 8 王清源等. 强激光与粒子束. 1993, 5 (1): 118~128

The Eigenmode of the Rectangular Waveguide Filled on H—side with Two Dielectrics

Ling Genshen Liu Yonggui

(Department of Applied Physics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

The eigenmode dispersion equation and eigenmode function of the rectangular waveguide filled on H—side with two dielectrics were obtained by solving the electric Hertzian potential equation. The eigenmodes were LSE and LSM, and the dispersion relation curves were also given.

Key words filled H—side with two dielectrics; rectangular waveguide; eigenmode