国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第4期 1994年12月 Vol. 16 No. 4

保证率点值区间估计的Monte－Carlo方法*

武小悦 孙君森
（国防科技大学） （中南勘测设计研究院）

摘　要　提出了一种根据实测样本系列对保证率点值进行区间估计的Monte－Carlo方法。对于具有正态分布或对数正态分布的样本，首先推出总体参数的分布，然后用Monte－Carlo法生成总体参数系列，据此求得相应的保证率点值系列，最后通过经验分布推得在给定置信度下保证率点值的区间估计，本文还给出了一个算例。

关键词　保证率；Monte－Carlo方法；区间估计
分类号　O213

保证率是水工设计的重要依据之一。根据实际问题的不同要求，大致可分为两类：一种是上保证率，如涉及抗压强度、抗拉强度时，要求计算不低于给定值的概率；另一种是下保证率，如混凝土的线膨胀系数等，要求不大于给定值的概率。当已知保证率求其相应的值时，即为求解保证率点值。

对于给定的样本，当总体分布未知时，工程上计算保证率及点值的一般做法是采用经验分布法。若已知样本总体分布类型，则可由样本统计量算出分布参数，配出理论分布曲线去求解。

用上述方法求出的保证率和保证率点值受观测样本的影响，对同一母体来说，若抽取不同的样本，得出的点估计值一般也不会相同。由于保证率及保证率点值的大小关系到水工建筑物的可靠性，将直接影响工程的设计参数，因此，了解估计值的变化范围具有重要的意义。

文献[1]中对几种典型总体分布给出了可靠度的区间估计的理论方法，对于正态分布及对数正态分布总体，通过非中心t分布统计量，可以求得已知点值对应的保证率的置信区间估计，并给出了国内外有关学者编制的数表。但是对于已知保证率求保证率点值的置信区间估计问题，该文献中并没有给出。这方面要想从理论上求解，必须找到合适的统计量，需要做深入的研究。

本文提出了对于正态分布或对数正态分布总体的样本系列求保证率（点值）的区间估计的Monte－Carlo方法。这种方法概念明确，不用查表，适合于计算机求解。而且不仅可以得出保证率的区间估计，还可以给出保证率点值的区间估计。

* 1993年11月4日收稿

1 正态总体参数的随机模型

设观测样本系列 x_1，x_2，…，x_n 来自正态总体 N（μ，σ^2）.

1.1 经验保证率的推求

在水工设计中，常常采用以下方法求保证率（也称经验公式）

设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 排序为

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \xi_n$$

则
$$P(\xi \geqslant \xi_i) = \frac{n-i+1}{n+1} \times 100(\%) \tag{1}$$

当已知 P 求保证率点值 x_p，可对经验分布点插值。

1.2 理论保证率的点估计

令
$$\hat{\mu} = \bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \tag{2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2 \tag{3}$$

则 $\hat{\mu}$ 是 μ 的有效估计量，$\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的渐近有效估计[2]。

从而对所给的样本系列，理论保证率的计算公式为

$$P(\xi \geqslant x_p) = P(\frac{\xi - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \geqslant \frac{x_p - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) = 1 - \Phi(\frac{x_p - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) \tag{4}$$

其中，$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$，是标准正态分布的下侧概率值。

当已知 P 求其对应的保证率点值 x_p 时，可由 Φ（$\frac{x_p - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$）$=\Phi$（$u_p$）$=1-P$ 求出。

1.3 总体参数的随机模型

由统计理论[2]知，当 σ^2 未知时，$\frac{\bar{\xi}-\mu}{s/\sqrt{n}}$服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布，当 μ 未知时，$\frac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2}$服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布，即

$$\mu = \bar{\xi} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1} \tag{5}$$

$$\sigma^2 = (n-1)s^2/\chi^2_{n-1} \tag{6}$$

公式（5）（6）反映了在给定 $\bar{\xi}$，s 下，总体 μ，σ^2 的不定性，也就是说，当总体 μ，σ^2 取不同的值时，仍可能对应于同一 $\bar{\xi}$，s 值，从而造成理论保证率点估计值的不精确性。

2 Monte－Carlo 法求保证率（点值）的区间估计算法

2.1 依据上述理论，下面给出对给定的点 x_p，用 Monte－Carto 法求保证率区间估计的算法：

（1）采用公式（2）（3）计算 $\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}^2$.

（2）生成长度为 m 的服从 t_{n-1}，χ^2_{n-1}分布的伪随机系列[3]。

（3）用公式（5）（6）生成（μ，σ）的随机系列

$$\{(\mu_1,\sigma_1),(\mu_2,\sigma_2),\cdots,(\mu_m,\sigma_m)\}$$

(4) 用公式(4)求出各组(μ_i,σ_i)下对应于x_p的保证率p_i,$(i=1,2,\cdots,m)$.

(5) 用(1)式对样本系列$\{p_i\}_{i=1}^m$求其经验分布

$$F_p(p)=P(p_f\leqslant p)$$

(6) 对给定的置信度α,对应于x_p的保证率的区间估计为

单边上限:$F_p(P_2^1)=1-\alpha$

单边下限:$F_p(P_1^1)=\alpha$

双边区间:$F_p(P_1^1)=\dfrac{1+\alpha}{2},F_p(P_2^1)=\dfrac{1-\alpha}{2}$

2.2 对给定的保证率p,用 Monte-Carlo 法求保证率点值x_p的算法如下

(1)(2)(3)同2. 1

(4) 由$\Phi\left(\dfrac{x_p-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)=\Phi(u_p)=1-p$求出各组$(\mu_i,\sigma_i)$对应于$P$的点值计值$x_{pi}$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

(5) 用(1)式对样本系列估计$\{x_{p_i}\}_{i=1}^m$求出其经验分布$F_x(x)=P(\xi<x)$.

(6) 对给定的置信度α,对应于p的保证率点值x_p的区间估计为

单边上限:$F_x(x_{P_2})=1-\alpha$

单边下限:$F_x(x_{P_1})=\alpha$

双边区间:$F_x(x_{P_1})=\dfrac{1+\alpha}{2},F(x_{P_2})=\dfrac{1-\alpha}{2}$

3 算 例

为了说明上述算法,作者在AST386微机上用C^{++}语言编制了相应的计算机程序,并对以下算例进行了计算分析。

设有一正态总体$N(5.21,0.2203^2)$. 作者用计算机生成了样本容量$n=10$的4组伪随机系列作为来自该总体的样本。在运用Monte-Carlo估计时,每组仿真200次。

用该总体实际参数算得的理论保证率点值见表1。

用4组样本按1.2中的方法求出的保证率点值的估计值见表2。

表1 实际参数下的保证率点值

P	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
x_p	5.0614	5.0246	4.982	4.928	4.848

由此可见,由于抽样的随机性,可能导致用常规方法算得的点估计值x_p偏离真值。为估计偏离范围的大小,现运用2.2中的算法给出当$\alpha=0.95$时,x_p的区间估计(见表3)。由于篇幅所限,表3中只列出了以第一组及第二组数据为假设样本的计算结果。表中若干波动,如$p=0.75$时,第一组单边下限$4.774<4.781$,(该组双边估计下限)是由于仿真次数不足引起误差所致。但增加仿真次数又会增加计算时间。

对照表1,可以看出无论取哪一组计算,x_p的真值均毫无例外地落在区间估计范围。因此,用本文提出的方法估计x_p的真值范围是可行的。

表 2　各组样本算得的 x_p

p	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
第一组	4.982	4.939	4.890	4.829	4.737
第二组	5.057	5.012	4.959	4.892	4.793
第三组	5.198	5.167	5.132	5.087	5.021
第四组	4.966	4.918	4.862	4.792	4.688

表 3　各组的 x_p 的区间估计　置信度 $\alpha=95\%$

p	组别	单边下限	单边上限	双边区间	
0.75	第一组	4.774	5.152	4.781	5.201
	第二组	4.896	5.240	4.782	5.267
0.80	第一组	4.730	5.090	4.688	5.127
	第二组	4.809	5.173	4.719	5.236
0.85	第一组	4.674	5.054	4.673	5.065
	第二组	4.783	5.135	4.665	5.166
0.90	第一组	4.507	4.974	4.591	5.033
	第二组	4.683	5.048	4.482	5.104
0.95	第一组	4.484	4.921	4.352	4.973
	第二组	4.512	4.992	4.437	5.055

4　结　论

综合上述，可以得出如下结论：

（1）本文提出了一种根据实测样本对保证率及保证率点值进行区间估计的 Monte－Carlo 方法。此方法适用于具有正态分布或对数正态分布的总体。对于对数正态分布总体，只需做相应的变换即可化为正态分布的情况处理。同文献［1］中介绍的方法相比，本文的 Monte－Carlo 法概念明确，推导简单，而且可以对保证率点值作出区间估计。只是估计精度受仿真次数及随机数质量的影响。这取决于具体问题的精度要求。

（2）本文的算例表明，本文提出的算法的区间估计范围是可用的，能够反映总体的真实保证率点值的大小范围，可用于工程设计参考。

（3）若加大仿真次数，可以提高估计的精度，但在样本容量已定的情况下，一般难以缩小区间的范围。

（4）对于非正态及非对数正态总体的保证率及点值的区间估计问题，本文未加以研究。作者认为关键在于寻找出总体分布参数估计的统计分布。文献［1］中介绍了几种典型分布的保证率的置信区间估计问题，但没有给出保证率点值的估计方法。作者认为，基于本文介绍的仿真原理，这类保证率点值的区间估计问题不难采用类似的 Monte－Carlo 解法解决。即使通过理论推导求出解析分布，其表达关系式一般也是十分复杂的方程，最终求解仍需大量的数值计算。因此，本文提出的方法具有实用参考意义。

参 考 文 献

1 胡昌寿．可靠性工程——设计、试验、分析管理（下册）．北京；宇航出版社，1988
2 周概容．概率论与数理统计．北京：高等教育出版社，1984
3 徐钟济．蒙特卡罗方法．上海：上海科学技术出版社，1985．125～126

A Monte—Carlo Method for Interval Estimation of Firm Probability Point

Wu Xiaoyue

(National University of Defense Technology)

Sun Junsen

(Mid—South Design and Research Institute for Hydroelectric Projects)

Abstract

A Monte—Carlo approach to the interval estimation of firm probability point based on real samples is presented in this paper. For ensemble with normal or lognormal distribution, the distributions of its parameters are found out, then its parameter samples are generated by the use of Monte—Carlo method. Based on it, the interval estimation of firm probability point under given confidence level is found through empirical distribution. A calculation example is given in this paper as well.

Key words firm probability; Monte—Carlo method; lnterval estimation