国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第4期 1994年12月 Vol. 16 No. 4

赋双权二部图中最大权最小权完美匹配*

谢 政 陈浩光

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文涉及的是在赋双权的二部图中求关于第一个权最大的限制下、第二个权最小的完美匹配的网络模型，给出了这一模型的有效算法，并用此算法解决了企业的优化组合分工中的挖潜问题。

关键词 二部图；二分网络；匹配；完美匹配

分类号 O157

1 网络模型的建立

给定一个无向图 $G=(V, E)$，设 $M\subseteq E$，若 M 中任何两条边都在 G 中不相邻，则称 M 为 G 的一个匹配；如果 G 中每个顶点都与匹配 M 的边关联，则称 M 为 G 的完美匹配。

在一个赋权二部图 $G=(S,T,E,w)$ 中，对于每条边 $e_{ij}=x_iy_j$ 赋实数权 w_{ij}，定义 G 的匹配 M 的权 $w(M)$ 为 M 中所有边权之和。G 中权最大的完美匹配称为 G 的最大权完美匹配，G 中权最小的完美匹配称为 G 的最小权完美匹配。

本文未特别声明的概念、记号，均见文献[1].

下面我们建立本文所要讨论的网络模型。

给定一个赋双权的简单二部图 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$，这里 $|S|=|T|=n$，对于每条边 $e_{ij}=x_iy_j\in E$，$x_i\in S$，$y_j\in T$，赋给非负实数权 w_{ij} 与 $\tilde{w}_{ij}$. 记

$$\mathscr{M}=\{M|M\text{ 是 }G\text{ 中关于 }w\text{ 的最大权完美匹配}\}$$

求

$$M^*=\min\{\tilde{w}(M)|M\in\mathscr{M}\}$$

称 M^* 为 G 中关于 $(w,\tilde{w})$ 的最大权最小权完美匹配，或者简称为 G 的最大权最小权完美匹配。

2 主要定理及结论

先研究赋双权二部图 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$ 是一个完全二部图时的上述网络模型，其中 $|S|=|T|=n$. 赋双权的完全二部图 G 简称为完备二分网络 G.

* 1993年5月25日收稿

设 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$ 是一个完备二分网络，$|S|=|T|=n$. 我们在 $S\cup T$ 上定义一个实函数 l，如果对于任意边 x_iy_j，$x_i\in S$，$y_j\in T$，都有

$$l(x_i)+l(y_j)\geqslant w_{ij}$$

则称 l 是 G 上关于权 w 的一个可行顶点标记，以下均简称为可行顶点标记。

引理 1[1] 如果 l_0 和 M_0 分别是 G 的可行顶点标记和匹配，并且

$$w(M_0)=\sum_{i=1}^{n}l_0(x_i)+\sum_{j=1}^{n}l_0(y_j)$$

则 M_0 是 G 中关于 w 的最大权匹配。

由引理 1 可知，要求出 G 中关于 w 的最大权匹配，可以设法求出满足引理 1 的 l_0 和 M_0；又因 G 中每个顶点最多与 M_0 中一条边关联，所以 M_0 的所有边 x_iy_j 必须满足

$$w_{ij}=l_0(x_i)+l_0(y_j)$$

我们用 $E(l)$ 表示 E 中所有满足条件

$$w_{ij}=l(x_i)+l(y_j)$$

的边 x_iy_j 的集合，其中 l 为可行顶点标记；用 $G(l)$ 表示 $E(l)$ 在 G 中的边导出子图，并且 $G(l)$ 中的边权仍为该边在 G 中的权，我们称 $G(l)$ 为可行顶点标记 l 的相等子图。

下面两个定理是本文算法的主要依据。

定理 1[1] 设 l 是完备二分网络 G 的可行顶点标记，M 是 G 的完美匹配，且 $M\subseteq E(l)$，则 M 是 G 的关于 w 的最大权完美匹配。

设 l 是完备二分网络 G 的可行顶点标记，若 M 是 G 的完美匹配，且 $M\subseteq E(l)$，则称 l 为 G 的最佳顶点标记。

定理 2 设 l 是完备二分网络 G 的最佳顶点标记，M 是 G 的任一关于 w 的最大权完美匹配，则 $M\subseteq E(l)$.

证明 设 l 是 G 的最佳顶点标记，那么存在 G 的完美匹配 M'，有 $M'\subseteq E(l)$，则

$$w(M')=\sum_{i=1}^{n}l(x_i)=\sum_{j=1}^{n}l(y_j)\tag{1}$$

若定理不成立，即存在 G 的一个最大权完美匹配 M_0，使 $M_0\not\subseteq E(l)$. 记

$$B(M_0)=M_0\backslash E(l),\quad I(M_0)=M_0\cap E(l)$$

显然 $B(M_0)\neq\phi$. 于是对任何 $x_iy_j\in B(M_0)$，有

$$w_{ij}<l(x_i)+l(y_j)$$

对一切 $x_iy_j\in I(M_0)$，有

$$w_{ij}=l(x_i)+l(y_j)$$

因此

$$\begin{aligned}w(M_0)&=w(B(M_0))+w(I(M_0))\\&<\sum_{i=1}^{n}l(x_i)+\sum_{i=1}^{n}l(y_i)\end{aligned}\tag{2}$$

那么由(1)和(2)式知，$w(M_0)<w(M')$. 这与 M_0 是 G 的关于 w 的最大权完美匹配矛盾。

根据定理 1 和定理 2，当 l 是 G 的最佳顶点标记时，M 是 G 的关于 w 的最大权完美匹配当且仅当 M 是 $G(l)$ 中的完美匹配。

3 算 法

对给定的完备二分网络 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$，由前面的讨论可得到求解本文网络模型的算法思想：首先求出 G 中关于 w 的最佳顶点标记 l 及其相等子图$G(l)$；然后求出$G(l)$中关于 $\tilde{w}$ 的最小权完美匹配 M^*，则 M^* 便是 G 中最大权最小权完美匹配。

利用求完备二分网络最大权完美匹配的顶点标记算法[1]，不难给出求相等子图 $G(l)$ 的算法。

Step0　给出完备二分网络 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$ 中每个顶点标记：$l(x_i)=\max w_{ij}$，$l(y_j)=0$.

Step1　利用顶点标记算法，求 G 中关于 w 的最大完美匹配 M 并得到最佳顶点标记函数 l.

Step2　令 $E(l)=\phi$，　$E(G)=E$.

(2.1) 取边 $x_iy_j\in E(G)$，并令 $a_{ij}=l(x_i)+l(y_j)$.

(2.2) 若 $a_{ij}=w_{ij}$，则置 $E(l)=E(l)\cup\{x_iy_j\}$，转(2.3)；否则，什么也不做，转(2.3).

(2.3) 置 $E(G)=E(G)\backslash\{x_iy_j\}$。若 $E(G)=\phi$，则得到 $E(l)$，结束；否则转(2.1).

设 $|S|=|T|=n$，由[1]知，Step1 的计算量为 $O(n^3)$，易知 Step2 的计算量为 $O(n^2)$，故该算法的复杂性为 $O(n^3)$. 根据第 2 节的讨论，容易得到：

定理 3　给定完备二分网络 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$，设 l 是关于 w 的最佳顶点标记，M^* 是 $G(l)$关于 $\tilde{w}$ 的最小权完美匹配，则 M^* 是 G 中关于$(w,\tilde{w})$的最大权最小权完美匹配。

下面的定理 4，也是显然的。

定理 4　设完备二分网络 $N=(S,T,E,\tilde{w})$存在完美匹配。定义一个完备二分网络 $\hat{N}=(S,T,E,\hat{w})$：对任一边 $e\in E$，赋新权

$$\hat{w}(e)=K-\tilde{w}(e)$$

其中 K 是一个足够大的正的常数。此时 $\hat{N}$ 中最大权完美匹配就是 N 中最小权完美匹配。

下面给出求完备二分网络 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$中最大权最小权完美匹配的算法。

Step1　利用本文前面所述的算法求出完备二分网络 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$中关于 w 的最大权完美匹配 M_0，及最佳顶点标记函数 l 和 $E(l),G(l)$.

Step2　若$|E(l)|\leqslant|S|+1$，则 M_0 就是 G 中最大权最小权完美匹配；否则转 Step3.

Step3　利用定理 4 中给出的方法和顶点标记算法，求出 $G(l)$中关于 $\tilde{w}$ 的最小权完美匹配 M^*，则 M^* 是 G 中最大权最小权完美匹配。

易知：该算法的复杂性为 $O(n^3)$，其中$|S|=|T|=n$.

4　几点说明

上面我们讨论完备二分网络模型，对于非完备二分网络 $G=(S,T,E,w,\tilde{w})$，我们作如下几点说明：

(1) 如果$|S|\neq|T|$，不妨设$|S|>|T|$，我们就在 G 的 T 顶点集中增加$|S|-|T|$个顶点，为了方便仍记之为 T，此时$|S|=|T|$.

(2) 在 G 中适当添加一些新边，使之成为完全二部图。

(3) 对新添加的边均赋以两个权$(0,K)$，其中 K 是一个足够大的正数，它与定理 4 中的 K 取相同的值。这样便把非完备的二分网络 G 转化为完备二分网络 $\hat{G}=(S,T,\hat{E},w',w'')$.

(4) 利用第 3 节的算法，求 $\hat{G}$ 的最大权最小权完美匹配 $\hat{M}$，令

$$M = \hat{M}\backslash(\hat{E}\backslash E)$$

从而得到 G 中关于$(w,\tilde{w})$的最大权最小权匹配 M. 如果 G 中存在关于 w 的最大权完美匹配，则 M 便是 G 的最大权最小权完美匹配；否则，M 不是完美匹配。

5 应用举例

最后，我们讨论一个工作分派问题。

在某企业的生产车间有 n 个工作人员和 n 台机器，每个工作人员只在一台机器上工作，同时每台机器都只需一人操作。该车间是流水线成品，每个人员单位时间内生产的产品数量为定额。资料表明：i 工作人员在第 j 台机器上操作时，其产品合格率为 w_{ij}，其耗费的单位产品资源量为 $\tilde{w}_{ij}$. 要求确定一个最佳分配方案，使总的产品合格率最大的情况下，总的资源消耗尽可能少。

在解决此类问题时，把 n 个工作人员和 n 台机器当作顶点，分别用 S 和 T 表示；当且仅当工作人员 i 在第 j 台机器上操作时，就在相应的顶点间连边，并赋予两个权：第一个权为 $\hat{w}_{ij}=\ln w_{ij}$，第二个权为 $\tilde{w}_{ij}$. 这样得到一个赋双权完全二部图 $G=(S,T,E,\hat{w},\tilde{w})$，$G$ 中最大权最小权完美匹配就是上述工作分配问题的最佳分配方案。

参 考 文 献

1 刘家壮，徐源. 网络最优化. 北京：高等教育出版社，1991

2 Lawer E L. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. New York: Holt Rinehart and Winston, 1976

A Max-min Weight Perfect Matching in Bipartite Graph with Two Edge Weights

Xie Zheng　　Chen Haoguang

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

In this paper, we built a network model of max-min weight perfect matching in the bipartite graph with two edge weights, and give an efficient algorithm for it. Lastly, we solve a particular assignment problem.

Key words bipartite graph; bipartite network; matching; perfect matching