国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第4期 1994年12月 Vol. 16 No. 4

关于收缩算子的异步迭代收敛性*

蔡 放
(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 论证了 F 为收缩算子时，求解 $X=F(X)$ 的异步迭代方法初值选取范围，提出了异步迭代的大范围收敛方法。

关键词 异步迭代；多处理机；并行算法；不动点
分类号 O241.4

适合多处理机系统(MIMD)的异步迭代方法是并行算法研究的重要内容，其收敛性分析是基本问题之一[1]。考虑在多处理机系统求解一般的不动点问题

$$X = F(X)$$
$$F: D \subset R^n \to R^n$$
$$F(X) = (f_1(X), \cdots, f_n(X))^T, \quad X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in D$$

的异步迭代收敛性。这方面的主要工作见文[2][3]，其中文[2]是一篇内容丰富的经典性文献，它讨论了一类广泛的算子——收缩算子（附录之（1）. 为清楚和简炼，文[2]的有关内容置于后面的附录）的异步迭代收敛性，其具体条件是

(1) D 是闭的；

(2) $F(D) \subset D$；

(3) F 在 D 上是收缩算子。

在上述条件下，F 在 D 中有唯一不动点 ξ。文[2]中定理1给出了如下结论：对于取自 D 的任何初值 $X(0)$，任何异步迭代 $F, X(0), \psi, \varphi)$ 都收敛于 ξ，其中 ψ、φ 满足附录(2)的(a)、(b)和(c)。然而，下面我们给出的例1表明情况并非如此。在该例中，对于任何 $X(0) \in D$，总存在满足(a)、(b)和(c)的 ψ、φ，相应的异步迭代 $(F, X(0), \psi, \varphi)$ 并不收敛于 ξ.

例1 设 a 是小于1的正数。令

$$D = \{X_k = (a^k, a^k, \cdots, a^k)^T \in R^n \mid k = 1, 2, \cdots\} \cup \{O\} \subset R^n$$

$$F(X) = \begin{cases} O, & X \in D \\ X_0, & X \in R^n - D \end{cases}$$

F 在 D 上满足条件(1)、(2)和(3)，F 的 Lipchitzian 矩阵 $A=O$，且 $\xi=O$. 取

* 1993年11月21日收稿

$$\psi=\{s_1(j),s_2(j),\cdots,s_n(j))=(j-1,j-1,\cdots,j-1)\mid j=1,2,\cdots\}$$
$$\varphi=\{J_1=\{1\},\ J_j=\{1,2,\cdots,n\}\mid j=2,3,\cdots\}$$

ψ、φ满足(a)、(b)和(c)。任意给定$X(0)=X_k\in D$，$1\leqslant k<+\infty$，由异步迭代$(F,X(0),\psi,\varphi)$所产生的序列$\{X(j)\}$为

$$X(1)=(0,a^k,\cdots,a^k)^T$$
$$X(j)=X_0,\quad j=2,3,\cdots$$

在条件(1)、(2)和(3)成立时，传统的迭代方法

$$X(j)=F(X(j-1)),\quad j=1,2,\cdots$$

对于任何初值$X(0)\in D$总收敛于ξ，因此，在初值可取自D中任意一点的意义下，传统的迭代法具有“大范围”收敛性，而例1揭示了在多处理机系统执行的异步迭代一般不再保持这种性质。究其原因，这是由异步迭代在使用“老”的修正值时的“混乱”所引起的，它导致了向量$(x_1(s_1(j)),x_2(s_2(j)),\cdots,x_n(s_n(j)))^T$是否总能保持在$F$的收缩域$D$中的问题。

根据以上的讨论，关于收缩算子的异步迭代收敛性，我们有

定理 设条件(1)、(2)和(3)成立，且有条件(4)F在D中的唯一不动点ξ是D的内点。则存在超立方体$H=\{X\mid|X-\xi|\leqslant V\}\subset D$，$V\in R^n$，$V>0$，对于任何初值$X(0)\in D$，任何异步迭代$(F,X(0),\psi,\varphi)$都收敛于$\xi$，其中$\psi$，$\varphi$满足(a)、(b)和(c).

证明 设A是F的Lipchitzian矩阵。不妨设$\xi=0$，$|F(X)|\leqslant A|X|$，$X\in D$. 因$\rho(A)<1$，存在正数$\omega<1$和$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^T\in R^n$，$V>0$，使得$AV\leqslant\omega V$. 因$\xi$是$D$的内点，可设

$$H=\{X\mid|X|\leqslant V\}\subset D$$

(否则，可用αV代替V，α为充分小的正数)

任意给定$X(0)\in H$，归纳地证明，由任何异步迭代$(F,X(0),\psi,\varphi)$所产生的序列$\{X(j)\}$有意义，且保持在H中。设$|X(j)|\leqslant V$，$0\leqslant j\leqslant k$. 令

$$Z(k)=(x_1(s_1(k)),\ x_2(s_2(k)),\ \cdots,\ x_n(s_n(k)))^T$$

由(a)，$s_i(k)<k$，$i=1$，$\cdots$，n，故$|X(s_i(k))|\leqslant V$，从而$|x_i(s_i(k))|\leqslant v_i$，$i=1,\cdots,n$，即

$$|Z(k)|\leqslant V$$

当$i\in J_k$时，$x_i(k)=f_i(Z(k))$有意义，且

$$|x_i(k)|=[|F(z(k)|]_i\leqslant[A|Z(k)|]_i$$
$$\leqslant[AV]_i\leqslant[\omega V]_i=\omega v_i$$

当$i\overline{\in}j_k$时，

$$|x_i(k)|=|x_i(k-1)|\leqslant v_i$$

由上可知，$|X(k)|\leqslant V$.

$\{X(j)\}$的收敛性证明遵循文[2]。

注1：在例1中，定理中的H是不存在的，故条件(4)不能去掉。

注2：$H=D$是可能的。例如$D=R^n$时，由定理的证明可看出H可取为R^n，一个显然的例是F为线性算子时的情况(见文[4])。然而，一般来说，$H\neq D$.

例2 设$k_0>1$，将例1的D改为

$$D = H_1 \cup \{X_k | k = 1,2,\cdots,k_0 - 1\}$$
$$H_1 = \{X \mid |X| \leqslant X_{k_0}\}$$

F 仍如例1所示。这时条件(1)～(4)均成立。由于 $A=0$，V 可取作 X_{k_0}，从而 $H=H_1$. 但对于 $X(0)=X_k \in D-H$，与例1同理，异步迭代$(F,X(0),\psi,\varphi)$不一定收敛于 $\xi=0$.

从实际应用的角度出发，作为定理的推论，下面的“大范围”收敛性是有意义的。

推论 条件同定理。对于任何初值 $X(0)$，存在非负整数 $j_0=j_0(X(0))$，当 ψ、φ 满足(a)、(b)和(c)，以及

$$\text{(d)} \quad \begin{array}{ll} s_i(j) = j - 1,\ i = 1,\cdots,n, & j \leqslant j_0 \\ J_j = \{1,2,,n\} \quad , & j \leqslant j_0 \\ s_i(j) \geqslant j_0,\ i = 1,\cdots,n, & j > j_0 \end{array}$$

时，任何异步迭代$(F,X(0),\psi,\varphi)$都收敛于 ξ.

实际上，推论描述了在多处理机系统求解 $X=F(X)$的一种算法，它将同步迭代和异步迭代相结合，对于 D 中任何初值 $X(0)$，为使迭代收敛，在迭代的开始阶段，各进程之间实现同步，以产生传统迭代 $X(j)=F(X(j-1))$. 由于它收敛于 ξ，存在 $j_0 \geqslant 0$，使$X(j_0)$落入定理所述的超立方体 H 之中。在此，以 $X(j_0)$为初值，取消各进程之间的同步，开始异步迭代。这个算法即能放宽对初值的苛求，保持“大范围”收敛性，又能发挥异步迭代最大限度地减少同步和通信开销的优势。

附　录

设

$$F:D \subset R^n \to R^n,\ F(X) = (f_1(X),\cdots,f_n(X))^T, \quad X = (x_1,\cdots,x_n)^T \in D$$

(1) 收缩算子：如果存在非负矩阵 A，使得

$$|F(X) - F(Y)| \leqslant A|X - Y| \qquad X、Y \in D$$

则称 A 是 F 的 Lipchitzian 矩阵。若 A 的谱半径 $\rho(A)<1$，称 F 是 D 上的收缩算子。

(2) 异步迭代方法：$\psi=\{(s_1(j),s_2(j),\cdots,s_n(j)) \mid j=1,2,\cdots\} \subset N^n$($N$ 是非负整数集)，$\varphi=\{J_j \mid j=1,2,\cdots\}$是$\{1,2,\cdots,n\}$的非空子集序列，满足

(a) $s_i(j) \leqslant j-1$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots$

(b) $s_i(j) \to +\infty$，$j \to +\infty$，$i=1,2,\cdots,n$

(c) 对于任何 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，i 属于无穷多个 J_j. 给定初值 $X(0)$，序列$\{X(j)\}$为

$$x_i(j) = \begin{cases} x_i(j-1), & i \overline{\in} J_j \\ f_i(x_1(s_1(j)),\cdots,x_n(s_n(j))), & i \in J_j, \quad j = 1,2,\cdots。\end{cases}$$

称$\{X(j)\}$为求解不动点问题 $X=F(X)$的异步迭代，记为$(F,X(0),\psi,\varphi)$.

参 考 文 献

1 李晓梅，蒋增荣等著．并行算法．长沙：湖南科学技术出版社，1992，18～19

2 Gerard M Baudet. Asynchronous Interative Methods for Multiprocessors. J Association for Computing Machinery, 1978, 25(2): 226～244

3 El Tarazi M. Some Convergence Results for Asynchronous Algorithms. Numer Math. 1982(39): 325～340

4 D Cha2an and W Miranker, Chaotic Relaxation. Linear Algbra and Appl. 1969(2): 199～222

5 Lei L. Convergence of Asynchronous Iteration with Arbitrary Splitting Form. Linear Algbra and Appl. 1989, (113): 119～127

On Convergence of Asynchronous Interation with Contraction Operation

Cai Fang

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

This paper studies the asynchronous iteration for solving $X=F(X)$, where F is a contracting operator. We show that the extent of selecting the start vector differs from that of [2] theorem1. From the results we obtain a large extent method for asynchronous iteration.

Key words asynchronous iteration; multiprocessor; parallel algorithem; fix point problem