国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 17 卷第 1 期 1995 年 3 月 Vol. 17 No. 1

一类复三次样条的保凸条件*

朱健民

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文研究了一类定义在实轴区间上亏数为 1 的复三次样条的保凸条件，推广了文 [2] C^2 连续的实三次多项式样条的相应结果。

关键词 凸曲线，样条，正矩阵

分类号 O186.1

对于 C^2 连续的实三次插值样条，文[2]通过其型值点的二阶差商给出了一个保凸条件，其形式十分简洁，并在小挠度的曲线拟合中得到了有效应用[4]。对于大挠度曲线，可通过三次参数样条函数进行插值，但此曲线段可能出现多余的拐点和奇点，使得曲线不光顺。文 [3] 利用 Bézier 样条函数，构造了 G^2 连续（位置、切向和曲率连续）的保凸闭曲线，但要使其 C^2 连续是困难的。本文中将三次参数样条函数用复数形式表示，即为一特殊的复三次样条，得到了保凸的充分条件，从而推广了文 [2] 中的结论。

对复平面上的一条 Jordan 曲线 $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$，在其上由 A 至 B 的方向作一分划

$$\Delta: A = t_0, t_1, \cdots, t_n = B$$

记 Γ_j 为 t_{j-1} 到 t_j 的弧段。设 $\{f_j\}_{j=0}^n$ 为一列复数，定义 Γ 上亏数为 1 的复三次插值样条函数 $Q_\Delta(t)$ 为：

(1) 在每个弧段 Γ_j 上，$Q_\Delta(t)$ 为复三次多项式；

(2) $Q_\Delta(t)\in C^2(\Gamma)$；

(3) $Q_\Delta(t_j)=f_j,(j=0,1,\cdots,n)$.

文 [1] 首先研究了此类样条的存在和唯一性，并对其收敛性作了细致地讨论。在此，我们取 r 为实轴上的闭区间，$\Gamma=[a, b]$，其上亏数为 1 的复三次样条存在并对给定的边界条件唯一，它与实的三次样条有相同的 M—连续方程。

记 $Q''_\Delta(t_j)=M_j(j=0,1,\cdots,n),h_j=t_j-t_{j-1},\lambda_j=\dfrac{h_{j-1}}{h_j+h_{j-1}},\mu_j=1-\lambda_j,(j=1,2,\cdots,n-1)$，则有 M—连续方程：

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j,(j = 1,2,\cdots,n - 1) \tag{1}$$

记：

$$Df_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, \quad D^2 f_j = \frac{Df_{j+1} - Df_j}{h_j + h_{j+1}}$$

则 $d_j=6D^2f_j,(j=1,2,\cdots,n-1)$。在给定边界条件下(1)有矩阵形式

* 国防科技大学预研项目经费资助的课题
1994 年 6 月 14 日收稿

$$\mathbf{AM} = \mathbf{d} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{M}=(M_0,M_1,\cdots,M_n)^T$，$\mathbf{d}=(d_0,d_1,\cdots,d_n)^T$，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & \lambda & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}$$

我们称型值点到 $\{f_j\}_{j=0}^n$ 为凸的，若相邻两点相连接组成凸多边形。对型值点列 $\{f_j\}_{j=0}^n$，若 $\mathrm{I_m}(D^2f_j\,\overline{Df_j})>0$ $(j=1,2,\cdots,n,f_{(n+1)}=f_0)$，则它为凸的。这是因为

$$\begin{aligned}(h_j+h_{j+1})I_m(\overline{Df_j}D^2f_j) &= \mathrm{I_m}[(Df_{j+1}-Df_j)\,\overline{Df_j}] \\ &= \mathrm{I_m}[Df_{j+1}\,\overline{Df_j}] \\ &= \frac{1}{h_jh_{j+1}}\mathrm{I_m}[(f_{j+1}-f_j)(\overline{f}_j-\overline{f}_{j-1})]\end{aligned}$$

因此，$I_m(D^2f_j\,\overline{Df_j})>0$ 等价于

$$0<\arg(f_{j+1}-f_j)-\arg(f_j-f_{j-1})<\pi$$

因此，依次以 f_j 为顶点的多边形为凸多边形，其内角 $\theta_j=\pi-[\arg(f_{j+1}-f_j)-\arg(f_j-f_{j-1})]$（如图 1）。

设 $C:z=z(t)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的一条 C^2 连续的曲线。称其为凸的，若 $z'(t)\neq0$ 且 $\arg z'(t)$ 为 t 的严格增函数（如图 2）。因为 $\arg z'(t)=\mathrm{I_m}(\log z'(t))$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arg z'(t)=\mathrm{I_m}\frac{z''(t)}{z'(t)}=\frac{\mathrm{I_m}(z''(t)\,\overline{z'(t)})}{|z'(t)|^2}$$

因此，我们有

引理 1 设 $C:z=z(t)$，$t\in[a,b]$，$z(t)\in C^2[a,b]$，若 $\mathrm{I_m}(z''(t)\,\overline{z'(t)})>0$，$t\in(a,b)$ 则 C 在 $[a,b]$ 内为凸曲线。

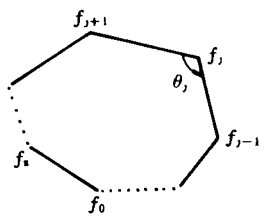

图 1

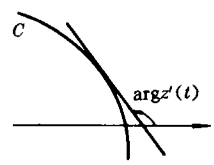

图 2

引理 2 对(2)所确定的复三次样条函数 $Q_\Delta(t)$，若

$$0\leqslant\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)<\frac{6}{\delta}\mathrm{I_m}(M_{j-1}\,\overline{Df_j}) \tag{3}$$

$(j=1,2,\cdots,n)$，$\delta=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}h_j$，则 $Q_\Delta(t)$ 在 $[a,b]$ 上为凸的。

证明 当 $t\in(t_{j-1},t_j)$ 时

$$Q_\Delta(t)=M_{j-1}\frac{(t_j-t)^3}{6h_j}+M_j\frac{(t-t_{j-1})^3}{6h_j}+\left(\frac{f_{j-1}}{h_j}-\frac{h_jM_{j-1}}{6}\right)(t_j-t)$$

$$+\left(\frac{f_j}{h_j}-\frac{h_jM_j}{6}\right)(t-t_{j-1})$$

由此计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{I_m}[Q''_\Delta(t)\,Q'_\Delta(t)] &= \mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)\frac{(t_j-t)(t-t_{j-1})}{2h_j}\\ &+\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{Df_j})\frac{t_j-t}{h_j}+\mathrm{I_m}(M_j\overline{Df_j})\frac{t-t_{j-1}}{h_j}\\ &-\frac{h_j}{6}\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)\end{aligned}\tag{4}$$

由于 $M_j\overline{Df_j}=M_j\overline{Df_{j+1}}-(h_j+h_{j+1})M_j\overline{D^2f_j}$，由(1)知

$$(h_j+h_{j+1})\mathrm{I_m}(M_j\overline{Df_j})=\frac{1}{6}[h_{j+1}\mathrm{I_m}(M_j\overline{M}_{j+1})-h_jI_m(M_{j-1}\overline{M}_j)]$$

所以

$$\mathrm{I_m}(M_j\overline{Df_j})=[\mathrm{I_m}((M_j\overline{Df_{j+1}})-\frac{1}{6}h_{j+1}\mathrm{I_m}(M_j\overline{M}_{j+1})]+\frac{1}{6}\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)$$

由此及(3)知

$$\mathrm{I_m}(M_j\overline{Df_j})>\frac{1}{6}h_j\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)\tag{5}$$

结合(3)(4)(5)便有

$$\mathrm{I_m}[Q''_\Delta(t)\,\overline{Q'_\Delta(t)})]>0,t\in(t_{j-1},t_j)$$

由引理 1 便得引理 2 的证明。

对(2)中的矩阵 $\mathbf{A}$，记 $\alpha_j=\frac{\lambda_j}{2}(j=0,1,\cdots,n-1)$，$\beta_j=\frac{\mu_j}{2}(j=1,2,\cdots,n)$，令

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&\alpha_0&&&0\\ \beta_1&0&\alpha_1&&\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\\ 0&&\beta_{n-1}&0&\alpha_{n-1}\\ &&&\beta_n&0\end{bmatrix}\tag{6}$$

则 $\|\mathbf{B}\|<1$，且 $\mathbf{A}=2(\mathbf{I}+\mathbf{B})$。另外，对(2)中的 d_j，令

$$\mathbf{F}=(\mathrm{I_m}(d_k\overline{d}_l))_{(n+1)\times(n+1)},\quad \mathbf{G}=(\mathrm{I_m}(d_k\overline{Df_l}))_{(n+1)\times(n+1)}$$

显然，$\mathbf{F}$ 为反对称矩阵，因此若 $\mathbf{F}\geqslant0$，则 $\mathbf{F}=0$.

定理 设$\{f_j\}_{j=0}^n$为凸的型值点列，$Q_\Delta(t)$为$[a,b]$上相应于分划 Δ 且亏数为 1 的复三次插值样条函数，若对于前面给出的矩阵 $\mathbf{B},\mathbf{F},\mathbf{G}$，满足

(1) $(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{F}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^T)(\mathbf{I}+(\mathbf{B}^T)^2)\geqslant0$

(2) $(\mathbf{I}-\mathbf{B})[12\mathbf{G}(\mathbf{I}-(\mathbf{B}^T)^2)-\delta\mathbf{F}(I-\mathbf{B}^T)]>0$

(其中 δ 同引理 2)，则 $Q_\Delta(t)$在$[a,b]$中为凸的。

证明 由引理 2，我们只须求使(3)成立的条件。令

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}0 & & & 0\\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n-1)}$$

则

$$(M_0,M_1,\cdots,M_n)\mathbf{S}=(M_1,M_2,\cdots,M_n,0)$$

于是由(2)

$$\begin{bmatrix}M_0\\ M_1\\ \vdots\\ M_n\end{bmatrix}(\overline{M}_1,\overline{M}_2,\cdots,\overline{M}_n,0]=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}(\overline{d}_0,\overline{d}_1,\cdots,\overline{d}_n)(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{S}$$

由此有

$$\begin{bmatrix}I_m(M_0\overline{M}_1 & & & *\\ & I_m(M_1\overline{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m(M_{n-1}\overline{M}_n)\\ * & & & 0\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^T)^{-1})\mathbf{S}$$

$$=\frac{1}{4}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^2)^{-1}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{F}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^T)(\mathbf{I}+(\mathbf{B}^T)^2)](\mathbf{I}-(\mathbf{B}^T)^4)^{-1}\mathbf{S} \qquad (7)$$

由(7)欲使 $\mathbf{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)\geqslant 0$，只须

$$(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{F}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^T)(\mathbf{I}+(\mathbf{B}^T)^2)\geqslant 0$$

此即为定理中的条件(1)。

同理，我们有

$$\begin{bmatrix}\mathrm{I_m}(M_0\overline{Df}_1) & & & *\\ & \mathrm{I_m}(M_1\overline{Df}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{I_m}(M_{n-1}\overline{Df}_n)\\ * & & & 0\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{GS} \qquad (8)$$

所以由(7)(8)得

$$\begin{bmatrix}6\mathrm{I_m}(M_0\overline{Df}_1)-\delta\mathrm{I_m}(M_0\overline{M}_1) & & & *\\ & 6\mathrm{I_m}(M_0\overline{Df}_2)-\delta\mathrm{I_m}(M_1\overline{M}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 6\mathrm{I_m}(M_{n-1}\overline{Df}_n)-\delta\mathrm{I_m}(M_{n-1}\overline{M}_n)\\ * & & & 0\end{bmatrix}$$

$$=6\mathbf{A}^{-1}\mathbf{GS}-\delta\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{S}$$

$$= \frac{1}{4}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^2)^{-1}[12(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{G}(\mathbf{I}-(\mathbf{B}^T)^2)-\delta(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{F}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^T)](\mathbf{I}-(\mathbf{B}^T)^2)^{-1}\mathbf{S}$$

因此，当(2)成立时，有 $6\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{Df_j})>\delta\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)$

定理证毕。

推论 若 $\mathbf{F}=0$，则当

$$\mathrm{I_m}[(2D^2f_j-\lambda_jD^2f_{j+1}-\mu_jD^2f_{j-1})\overline{Df_k}]>0 \tag{9}$$

时，$Q_\Delta(t)$在$[a,b]$中为凸的。其中 $\mu_0=\lambda_n=0$.

证明 因 $F=0$，由(7)知：$\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{M}_j)=0$，$(j=1,2,\cdots,n)$，所以只须求使 $\mathrm{I_m}(M_{j-1}\overline{Df_j})>0$ 成立的条件，而由(8)知，只须$(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{G}>0$. 由于

$$(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{G}=(\mathrm{I_m}(d_j\overline{Df_k})-\alpha_j\mathrm{I_m}(d_{j+1}\overline{Df_f})-\beta_j\mathrm{I_m}(d_{j-1}\overline{Df_k})_{(n+1)\times(n+1)}$$

所以当(9)成立时，有$(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{G}>0$.

注：一般实三次样条 $f(t)$可视为复三次样条 $Q(t)=t+if(t)$($i=\sqrt{-1}$，其型值点(t_j, y_j)用复数表示为 $f_j=t_j+iy_j$，于是有

$$Df_j=1+iDy_j, D^2f_j=iD^2y_i$$

由此知 $F=0$，(9)则变成

$$2D^2y_i-\lambda_jD^2y_{j+1}-\mu_jD^2y_{j-1}>0 \tag{10}$$

(10)即为[2]得到的保凸条件，因此上述推论为[2]的推广。

参 考 文 献

1 J H Ahlberg, E N Nilson, J L Walsh Complex cubic splines, Trans Amer Math Soc, 1967, 129: 391～413

2 王日爽，三次样条的凸性条件和注记，计算数学，1979，1：336～341

3 方逵，闭 G^2－连续的保凸插值样条曲线. 工程数学学报，1992，9：108～114

4 苏步青 刘鼎元，计算几何，上海：上海科技出版社，1980

5 方逵，C^1 连续的保凸三次插值样条曲线. 计算机辅助设计与图形学学报，1994，6 (4)

The Convex－preserving Condition for a Class of Complex Cubic Splines

Zhu Jianmin

(Department of System Engineering and Mathematics)

Abstract

In this paper we study the convex－preserving condition for a class of complex cubic splines which are defined in an interval of the real axis and have defect 1. The purpose of this paper is to generalize the conver－preserving condition for real cubic spline to the complex situation.

Key words convex curve, spline, positive matrix