国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第17卷第1期 1995年3月 Vol. 17 No. 1

拟带宽 Toeplitz 系统的秩1修正算法*

成礼智 蒋增荣

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文以带宽 Toeplitz 系统的快速并行解法为基础，通过建立秩1的修正格式讨论了拟带宽 Toeplitz 系统的一种快速并行算法，其串行运算量为 $9nh+O(h)$. 设 p 为处理机台数，当 $p\leqslant n$ 时，并行运算量为 $\left[\frac{n}{p}\right]\left(\frac{15}{4}h^2\log_2 n+O(1)\right)$；当 $p=3n$ 时，运算量为 $2h^2\log_2 n+O(1)$，其中 h 表示拟带宽宽度。

关键词 Toeplitz 系统，并行算法，秩1修正

分类号 O241

考虑线性双曲型偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ u(x,t)|_{t=0}=f(x),(x,t)\in\{a\leqslant x\leqslant b,t\geqslant 0\}\end{cases}\tag{1}$$

如果对时间导数取向前差分，对空间导数取中心差分，并使用 Crank-Nicolson 六点差分格式将（1）式离散化，则当边界条件具有周期性质时，(1) 式化为求解下列 Toeplitz 循环拟三对角方程组

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ -a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1\\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ \vdots\\ u_{n-1}\\ u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ \vdots\\ f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix}\tag{2}$$

文[1]讨论了方程组（2）的快速并行求解算法。将方程组（2）推广到拟带宽 Toeplitz 方程组情形，设

* 国防预研基金项目资助
1994年10月10日收稿

$$T(t_0,t_{2n-2})=\begin{bmatrix} t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_{n-s} & 0 & \cdots & 0 & t_0 \\ t_n & t_{n-1} & \cdots & t_{n-s+1} & t_{n-s} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & t_n & & & & \ddots & & \vdots \\ t_{n+r-1} & & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & & & t_{n-s} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & t_{n-1} & t_{n-2} \\ t_{2n-2} & 0 & \cdots & 0 & t_{n+r-1} & \cdots & t_n & t_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$X=(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})^T,f=(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})^T$$

考虑求解

$$T(t_0,t_{2n-2})X=f \tag{3}$$

在[2]中讨论了 $t_0=t_{2n-2}=0$ 的情况，即（3）为带宽 Toeplitz 方程组的快速并行求解，并得到串行与并行运算量均为目前已知算法最少的结果。在文[4]中通过求解 4 个带宽 Toeplitz 方程组得到（3）之解法。本文通过秩 1 修正技术，将（3）变为 3 个带宽情形建立了求解（3）的新方法，串行运算量比文[4]减少 25%左右。当处理机台数达到 $3n$ 时并行运算量仅为[4]的一半左右。

1 方程组(1.3)的秩 1 修正算法

将 T（t_0，t_{2n-2}）分裂为下列形式

$$T(t_0,t_{2n-2})=T(0,0)+\sum_{i=1}^{2}a_iZ_iY_i \tag{4}$$

其中，$a_1=t_{2n-2},a_2=t_0,Z_1=(0,0,\cdots,0,1)^T,Y_1=(1,0,0,\cdots,0,0),Z_2=Y_1^T,Y_2=Z_1^T$.

设

$$T_1=T(0,0)+a_1Z_1Y_1,\ T_2=T_1+a_2Z_2Y_2 \tag{5}$$

有下面的定理。

定理 1 设 $T(0,0)$ 可逆，则 T_1,T_2 均可逆，且

$$T_1^{-1}=(I-\beta_1(T^{-1}(0,0)Z_1)Y_1)T^{-1}(0,0) \tag{6}$$

$$T_2^{-1}=(I-\beta_2(T_1^{-1}Z_2)Y_2)T_1^{-1} \tag{7}$$

其中

$$\beta_1=\frac{a_1}{1+a_1Y_1T^{-1}(0,0)Z_1},\ \beta_2=\frac{a_2}{1+a_2Y_2T_1^{-1}Z_2}$$

证明 只证明（6）式，（7）式的证明是类似的。

（6）式右端左乘 T_1 且注意到 Y_1T^{-1}（0，0）Z_1 为一个已知数，有

$$\begin{aligned}&(T(0,0)+a_1Z_1Y_1)(I-\beta_1(T^{-1}(0,0)Z_1)Y_1)T^{-1}(0,0)\\ &=I+Z_1Y_1T^{-1}(0,0)[a_1-\beta_1(1+a_1Y_1T^{-1}(0,0)Z_1)]\\ &=I\end{aligned}$$

这表明 T_1 可逆且（6）式成立。

由于 T_1 与 T_2 均为某一矩阵与秩为 1 的矩阵 $a_1Z_1Y_1$ 或 $a_2Z_2Y_2$ 之和，故（6）、（7）式

可称之为矩阵逆的秩 1 修正公式。

由定理 1 中（6）、（7）式知，（3）的求解可按如下方式计算。

（1）求解 $T(0,0)u'_1=f$，$T(0,0)u'_2=Z_1$，$T(0,0)u'_3=Z_2$，$\beta_1=\dfrac{a_1}{1+a_1Y_1u'_2}$，则 $T_1X_1=f$ 的解 X_1 可表为

$$X_1 = T_1^{-1}f = (I-\beta_1(T^{-1}(0,0)Z_1)Y_1)T^{-1}(0,0)f$$
$$= (I-\beta_1u'_2Y_1)u'_1$$
$$= u'_1-\beta_1(Y_1u'_1)u'_2 \tag{8}$$

$T_1X_2=Z_2$ 的解 X_2 可表为

$$X_2 = u'_3-\beta_1(Y_1u'_3)u'_2 \tag{9}$$

设
$$\beta_2 = \frac{a_2}{1+a_2Y_2X_2}$$

（2）$T_2X=f$ 的解 X 可表为

$$X = X_1-\beta_2(Y_2X_1)X_2 \tag{10}$$

（10）式中 X 即为方程组（3）之解 X.

值得指出的是，当 $a_1\cdot a_2=0$，即 t_0 与 t_{2n-2}中某一个为 0 时，方程组（3）之解还可以简化，例如设 $a_2=0$，则求解过程简化为

（1）求解 $T(0,0)u'_1=f$，$T(0,0)u'_2=Z_1$，$\beta_1=a_1/(1+a_1Y_1u'_2)$，则方程组(3)之解 X 可表为

$$X = u'_1-\beta_1(Y_1u'_1)u'_2$$

由(8)～(10)式得到拟带宽 Toeplitz 方程组(3)的求解算法为

算法 1 f，Z_1，Z_2 如(5)式所设

第一步 同时求解（用[2]中快速多项式除法）Toeplitz 带宽方程组

$$T(0,0)u'_1 = f$$
$$T(0,0)u'_2 = Z_1,$$
$$T(0,0)u'_3 = Z_2,$$
$$\beta_1 = \frac{t_{2n-2}}{1+Y_1u'_2} = \frac{t_{2n-2}}{1+u_1^{(2)}}$$

其中 $u'_i=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_n^{(i)})^T$，$i=1,2,3$.

第二步：作两个 n 维列向量计算

$$X_1 = (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n^{(1)})^T$$
$$= u'_1-\beta_1(Y_1u'_1)u'_2$$
$$= u'_1-\beta_1u_1^{(1)}u'_2$$
$$X_2 = (x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(2)})^T$$
$$= u'_3-\beta_1(Y_1u'_3)u'_2$$
$$= u'_3-\beta_1u_1^{(3)}u'_2$$
$$\beta_2 = \frac{t_0}{1+t_0Y_2X_2} = \frac{t_0}{1+t_0x_n^{(2)}}$$

第三步　作一个 n 维列向量计算

$$X = X_1 - \beta_2(Y_2X_1)X_2$$
$$= X_1 - \beta_2 x_n^{(1)} X_2$$

X 即为(1.3)之解。

下面来看算法 1 的串行运算量。用文[2]中建立的快速多项式 除法求解带宽 Toeplitz 方程组，第一步求 u'_1，u'_2，u'_3 总的运算量 $9(r+s)n+O(r+s)$，β_1 的计算只需一次加法，一次除法。第二步计算 X_1，X_2 需 $2n+2$ 次乘法，$2n$ 次加法，β_2 的计算需一次加法、一次除法。第三步的计算需 $n+1$ 次乘法与 n 次加法。故算法 1 串行运算总的乘、加法次数为 $9(r+s)n+3n+O(r+s)$，比[4]中算法减少 25%左右。

若有 $3n$ 台处理机可供使用，第一步 u'_1，u'_2，u'_3 的计算可同时独立地进行，并行运算量为 $2(r+s)^2\log_2 n+O(1)$，第二步 X_1，X_2 可同时计算，并行运算量为 2 个乘法，1 个加法，第三步 X 的计算也为 2 个乘法，1 个加法，故此时算法 1 的并行运算总量为 $2(r+s)^2\log_2 n+O(1)$，约为[4]的一半左右。

2　数值例子

考虑下列拟三对角 Toeplitz 方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T=(1,1,\cdots,1)^T$.

设 $u'_i=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_n^{(i)})^T, i=1,2,3$，则(11)的求解按照算法 1 可如下进行：

(1)求解 $T\,u'_1=f, T\,u'_2=(0,0,\cdots,0,1)^T, T\,u'_3=(1,0,\cdots,0)^T$.

设 $g_1^{(1)}=1/3$，$h_1^{(1)}=1/3$，$h_1^{(2)}=0, h_1^{(3)}=1$，

递推地构造

$$g_i^{(1)} = 1/(3-g_{i-1}^{(1)}),\ i=2,3,\cdots,n$$
$$h_i^{(1)} = (1-h_{i-1}^{(1)})/(3-g_{i-1}^{(1)}),\ i=2,3,\cdots,n$$
$$h_i^{(2)} = -h_{i-1}^{(2)}g_i^{(1)},\ i=2,3,\cdots,n-1$$
$$h_n^{(2)} = (1-h_{n-1}^{(2)})g_n^{(1)},$$
$$h_i^{(3)} = -h_{i-1}^{(3)}g_i^{(1)},\ i=2,3,\cdots,n$$

则

$$\begin{cases} u_n^{(i)} = h_n^{(i)} \\ u_k^{(i)} = h_k^{(i)} - g_k^{(1)} \cdot u_{k+1}^{(i)},\ i=1,2,3; k=n-1,n-2,\cdots,2,1 \end{cases}$$

计算　$\beta_1=1/(1+u_1^{(2)})$，$\epsilon_1=\beta_1 u_1^{(1)}, \gamma_1=\beta_1 u_1^{(3)}$

(2)计算

$$
\begin{aligned}
X_1 &= (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})^T \\
&= (u_1^{(1)} - \varepsilon_1 u_1^{(2)},\ u_2^{(1)} - \varepsilon_1 u_2^{(2)},\cdots,u_n^{(1)} - \varepsilon_1 u_n^{(2)})^T \\
X_2 &= (x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})^T \\
&= (u_1^{(3)} - \gamma_1 u_1^{(2)},u_2^{(3)} - \gamma_1 u_2^{(2)},\cdots,u_n^{(3)} - \gamma_1 u_n^{(2)})^T \\
\beta_2 &= 1/(1 + x_n^{(2)}),\ \varepsilon_2 = \beta_2 x_n^{(1)}
\end{aligned}
$$

(3)计算 $X=X_1-\varepsilon_2X_2=(x_1^{(1)}-\varepsilon_2x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(1)}-\varepsilon_2x_n^{(2)})^T$,$X$ 即为(3.1)式之解。

参 考 文 献

1 李晓梅、蒋增荣等. 并行算法. 长沙：湖南科技出版社，1992

2 成 礼智，蒋增荣. 带状（块）Toeplitz 方程组的快速并行求解. 数值计算与计算机应用，1994，(1)

3 Aho Hopcroft Ullman. The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addsion-Welsey Company，1976

4 成礼智. 拟带宽 Toeplitz 系统的快速并行求解. 见：全国第四届并行算法学术会议论文集（南京），北京：航空工业出版社，1993.11

Rank-1 Updating Algorithm for Near Banded Toeplitz Systems

Cheng Lizhi Jiang Zengrong

(Department of Systems Engineering and Mathematics)

Abstract

In this paper, we describe a new fast parallel solution for near banded Toeplitz systems based on fast solution to banded Toeplitz systems and rank-1 updating strategy, the serial times are $9nh+O(h)$, let p be the number of processor, when $p\leqslant n$, parallel times are $\left\lceil\frac{n}{p}\right\rceil\left(\frac{15}{4}h^2 log_2 n+O(1)\right)$, when $p=3n$, parallel times are $2h^2\log_2 n+O(1)$, where h is bandwidth.

Key words Toeplitz systems, parallel algorithm, rank－1 updating