国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 17 卷第 1 期　1995 年 3 月　Vol. 17 No. 1

度量空间的非标准特征（Ⅰ）*

刘普寅

（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　本文首先引进度量空间非标准包的定义，然后将讨论非标准包的许多性质。在此基础上，用非标准方法来刻划度量空间中的各种紧性。最后应用这些结果，将证明 Arzela-Ascoli 定理，并在较弱的条件下，得到 Banach 不动点定理。

关键词　非标准包，预近标准点，预紧集，预紧算子，几乎紧集。

分类号　0177.99

1969 年，W. A. J. Luxemburg 在文[1]中建立了一致空间非标准包的概念。它的提出，为经典的拓扑学及泛函分析的研究，特别是这些学科中一些基本概念与基本定理的刻划和描述，提供了非常有效的工具。所以在最近的二十年中，涌现了一大批用非标准方法来研究拓扑学与泛函分析的文献资料，这些成果不仅使得相关学科中的现有结果更加精炼和直观，而且还取得了一系列具有深远意义的新成果，其中以 A. R. Bernstein 与 A. Robinson 的“Hilbert 空间上多项式紧算子的不变子空间的存在性证明”为代表，C. W. Henson[2][3][4]，L. C. Moore，Jr. [2][3]，D. Cozart[6]以及 H. Render[5]等在拓扑向量空间及 Banach 空间理论的非标准研究方面，都作出了许多重要的贡献。

本文 § 1 定义了一个度量空间（M，d）的非标准包（$\hat{M}$，$\hat{d}$），并得到了（$\hat{M}$，$\hat{d}$）的一系列性质，在 § 2，用非标准方法刻划了度量空间（M，d）中诸如全有界性，列紧性等紧性，相应地简化了许多经典结论的证明。最后在 § 3，应用上述诸结果，用非标准方法证明了 Arzela-Ascoli 定理，并在较弱的条件下，得到了 Banach 不动点定理。

本文的讨论均假定在一个 κ-饱和模型 $^*V(S)$ 中进行，其中 S 含所论度量空间 M 和实数集 R，这里 $\kappa=(\mathrm{Card}(V(S))$. 在下面的讨论中，$R_+=\{x\in R\,|\,x>0\}$，$N$ 表示自然数集；(M,d) 为度量空间，而 $B(p,r)$ 表示 M 中以 $p\in M$ 为中心，$r\in R_+$ 为半径的开球，即 $B(p,r)=\{q\in M\,|\,d(p,q)<r\}$；$(^*M,{}^*d)$ 表示 (M,d) 的非标准扩张，$p\in M$，$^*p$ 表示 $^*M$ 中的标准点。为简明计，今后在不致混淆时，将 $^*d$ 仍记为 d，而 $^*p$ 也写作 p. $^*M$ 中以 $q\in{}^*M$ 为中心，$\underline{r}\in{}^*R_+$ 为半径的球记为 $\underline{B}(\underline{p},\underline{r})$，即 $\underline{B}(\underline{p},\underline{r})=\{\underline{q}\in{}^*M\,|\,d(\underline{p},\underline{q})<\underline{r}\}$. 显见 $\underline{B}(\underline{p},\underline{r})$ 为内集，且当 $p\in M$，$r\in R_+$ 时，$\underline{B}(p,r)={}^*B(p,r)$. 若 $A\subset M$，则记 $\mathrm{ns}(^*A)$ 为 $^*A$ 中全体近标准点之集，即 $\mathrm{ns}(^*A)=\{\underline{p}\in{}^*A\,|$ 存在 $p\in A$，使 $d(\underline{p},p)\approx 0\}$. 至于其它特别说明的记号均可见文[1]和文[8].

1　度量空间的非标准包

设 $\underline{p}\in{}^*M$，称 $\underline{p}$ 为 $^*M$ 的有限点是指：存在点 $p\in M$，使 $^\circ d(\underline{p},p)<+\infty$. 记 $\mathrm{Fin}(^*M)$ 为 $^*M$ 的全

* 国家自然科学基金和国防科技大学青年科研基金资助项目。
1994 年 11 月 20 日收稿

体有限点之集，即 $\mathrm{Fin}({}^*M)=\{\underline{p}\in {}^*M \mid 存在\ p\in M，使{}^\circ d(\underline{p},p)<+\infty\}$. 对 $\underline{p}\in {}^*M$，记 $\mathrm{m}(\underline{p})=\{\underline{q}\in M \mid d(\underline{p},\underline{q})\approx 0\}$，称 $\mathrm{m}(\underline{p})$ 为 $\underline{p}$ 的单子。在 ${}^*M$ 中引入关系"$\approx$"：

$$\underline{p},\underline{q}\in {}^*M,\underline{p}\approx\underline{q} \text{ 当且仅当 } \underline{q}\in\mathrm{m}(\underline{p}) \tag{1}$$

由 (M,d) 的度量 d 的定义及转换原理，易验证(1)所定义的"$\approx$"为一个等价关系，而且有

命题 2.1 设 $\underline{p}_1,\underline{p}_2,\underline{q}_1,\underline{q}_2\in\mathrm{Fin}({}^*M)$，且 $\underline{p}_1\approx\underline{p}_2$，$\underline{q}_1\approx\underline{q}_2$，则有 $d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)\approx d(\underline{p}_1,\underline{q}_2)$.

证明 由 d 的三角不等式即知

$$\begin{aligned}{}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{q}_1) &= {}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{p}_2)+{}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)+{}^\circ d(\underline{q}_1,\underline{q}_2)\\ &= {}^\circ(d(\underline{p}_2,\underline{p}_1)+d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)+d(\underline{q}_1,\underline{q}_2))\\ &\geqslant {}^\circ(d(\underline{p}_2,\underline{q}_2)) = {}^\circ d(\underline{p}_2,\underline{q}_2)\end{aligned}$$

同理，${}^\circ d(\underline{p}_2,\underline{q}_2)\geqslant{}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)$，故 ${}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)={}^\circ d(\underline{p}_2,\underline{q}_2)$. 而由 $\underline{p}_1,\underline{p}_2,\underline{q}_1,\underline{q}_2\in\mathrm{Fin}({}^*M)$，则 ${}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)<+\infty$，${}^\circ d(\underline{p}_2,\underline{q}_2)<+\infty$，故有结论 $d(\underline{p}_1,\underline{q}_1)\approx d(\underline{p}_2,\underline{q}_2)$ 成立。

记 $\hat{M}=\mathrm{Fin}({}^*M)/\approx$，且 $\forall\ \underline{p}\in\mathrm{Fin}({}^*M)$，记 $\hat{\underline{p}}$ 为以 $\underline{p}$ 为代表元的 $\hat{M}$ 的元素，即 $\hat{\underline{p}}=\mathrm{m}(\underline{p})=\{\underline{q}\in\mathrm{Fin}({}^*M)\mid d(\underline{p},\underline{q})\approx 0\}\in\hat{M}$. 定义 $\hat{d}:\hat{M}\times\hat{M}\to R_+\cup\{0\}$ 如下：

$$\forall\ \hat{\underline{p}},\hat{\underline{q}}\in\hat{M}\quad \hat{d}(\hat{\underline{p}},\hat{\underline{q}}) = {}^\circ d(\underline{p},\underline{q}) \tag{2}$$

由命题 2.1，上述(2)有意义，而且容易验证，$\hat{d}$ 为 $\hat{M}$ 上的一个度量，故 $(\hat{M},\hat{d})$ 为一个度量空间。

定义 2.1 上述得到的度量空间 $(\hat{M},\hat{d})$，称为 (M,d) 的非标准包。而记 $\hat{B}(\hat{\underline{p}},r)=\{\hat{\underline{q}}\in\hat{M}\mid\hat{d}(\hat{\underline{p}},\hat{\underline{q}})<r\}$，$r\in R_+$.

定理 2.1 $(\hat{M},\hat{d})$ 为一个完备的度量空间。

证明 只需证明其完备性即可。设 $\{\hat{\underline{p}}_n\mid n\in N\}$ 为 $(\hat{M},\hat{d})$ 中的 Cauchy 列，即 $\forall\ k\in N$，存在 $n_k\in N$，使 $\forall\ m,n\geqslant n_k$，有 $\hat{d}(\hat{\underline{p}}_n,\hat{\underline{p}}_m)<\frac{1}{2k}$，则由(2)，此时 $d(\underline{p}_n,\underline{p}_m)<\frac{1}{k}$. 将序列 $\{\underline{p}_n\mid n\in N\}$ 扩充为内序列 $\{\underline{p}_n\mid n\in{}^*N\}$，令

$$D_k=\{n\in{}^*N\mid \underline{p}_n\in{}^*M,\ \forall\ m:n_k\leqslant m\leqslant n\Rightarrow d(\underline{p}_n,\underline{p}_m)<\frac{1}{k}\}$$

D_k 为内集，且 $D_k\supset[n_k,+\infty)\cap N$，从而由上溢原理，存在 $\gamma_k\in{}^*N\backslash N$，使 $[n_k,\gamma_k]\cap{}^*N\supset D_k$. 令 $\gamma=\inf\limits_{k\in N}\gamma_k$，则有 $\gamma_k\in{}^*N\backslash N$. 从而 $\forall\ k\in N,[n_k,\gamma]\cap{}^*N\supset D_k$，即 $\forall\ m\geqslant n_k$，有 $d(\underline{p}_m,\underline{p}_\gamma)<\frac{1}{k}$，而 $\underline{p}_m\in\mathrm{Fin}({}^*M)$，则 $\underline{p}_\gamma\in\mathrm{Fin}({}^*M)$. 故由(2)，$\hat{d}(\hat{\underline{p}}_m,\hat{\underline{p}}_\gamma)<\frac{1}{k}(m\geqslant n_k)$，从而 $\hat{\underline{p}}_m\xrightarrow{\hat{d}}\hat{\underline{p}}_\gamma(m\to+\infty)$，且 $\hat{\underline{p}}_\gamma\in\hat{M}$，即 $(\hat{M},\hat{d})$ 是完备的。(证毕)

$\forall\ p\in M$，则 $p\in\mathrm{Fin}({}^*M)$，从而 $\hat{p}=\mathrm{m}(p)\in\hat{M}$. 作映射 $\theta:M\to\hat{M}$，使 $\forall\ p\in M,\theta(p)=\hat{p}$，则由(2)，有

$$\forall\ p,q\in M,\ \hat{d}(\theta(p),\theta(q))=\hat{d}(\hat{p},\hat{q})=d(p,q) \tag{3}$$

从而 θ 为 $M\to\hat{M}$ 的等距映射，这样 (M,d) 可等距嵌入到 $(\hat{M},\hat{d})$ 中，记 $M_\wedge=\theta(M)$. 则有

定理 2.2 设 (M,d) 为度量空间，则存在完备度量空间 (Y,d_1)，使 M 与 Y 的一稠密子集是等距同构的，且在等距同构意义下，Y 唯一确定。此时称 Y 为 M 的完备化空间。

证明 设 $\theta:M\to\hat{M}$ 为嵌入映射，由定理 2.1，$(\hat{M},\hat{d})$ 为完备度量空间，故若记 $\overline{M}_\wedge$ 为 $M_\wedge$ 在 $(\hat{M},\hat{d})$ 中的闭包，则 $\overline{M}_\wedge\subset\hat{M}$，且 $(\overline{M}_\wedge,\hat{d}|_{\overline{M}_\wedge})$ 也是一个完备度量空间，由(3)及 θ 的定义，知 M 与 $M_\wedge$ 是等距同构的，从而记 $(Y,d_1)\triangleq(\overline{M}_\wedge,\hat{d}|_{\overline{M}_\wedge})$ 即可。

设 (Y_0,d_0) 为 (M,d) 的另一完备化空间，为方便计，不妨设 $M\subset Y_0$，即 M 在 Y_0 中稠密。$\forall\ x\in Y_0$，有 $\{x_n\mid n\in N\}\subset M$，使 $d_0(x,x_n)\to 0(n\to+\infty)$，从而 $\{x_n\mid n\in N\}$ 为 M 中 Cauchy 列，故它对应 Y 中 Cauchy 列 $\{y_n\mid n\in N\}$，从而有 $y\in Y$，使 $d_1(y_n,y)\to 0(n\to+\infty)$. 由 (Y,d_1) 是 (M,d) 的完备化知，y 与 $\{x_n\mid n\in N\}$ 的选取无关，只与 x 相关，故作映射 $T:Y_0\to Y$，使 $Tx=y$. 易验证 T 为满射，且

$$d_1(Tx_1,Tx_2)=d_1(y_1,y_2)=\lim_{n\to+\infty}d_1(y_{1n},y_{2n})$$
$$=\lim_{n\to+\infty}d_0(x_{1n},x_{2n})=d_0(x_1,x_2)$$

其中 $y_i=Tx_i$，$\{y_{in}|n\in N\}\subset Y$，且 $y_{in}\xrightarrow{d_1}Tx_i(n\to+\infty)$，$x_i\in Y_0$，$\{x_{in}|n\in N\}$为与$\{y_{in}|n\in N\}$对应的序列$(i=1,2)$. 从而 T 为等距映射，即(Y_0,d_0)与(Y,d_1)等距同构。(证毕)

这一定理的证明，比用经典方法要简洁。

定义 2.2 设(M,d)为度量空间，称点 $\underline{p}\in{}^*M$ 为预近标准点是指：存在点列$\{p_n|n\in N\}\subset M$，以及$\{r_n|n\in N\}\subset R_+$，满足 $r_n\downarrow 0(n\to+\infty)$，使 $\underline{p}\in\bigcap_{n\in N}{}^*B(p_n,r_n)$. 若${}^*M$ 中每一点均为预近标准点，则称${}^*M$是预紧的。

记 $\mathrm{Pns}({}^*M)$为${}^*M$ 中全体预近标准点之集，显见

$$M\subset \mathrm{ns}({}^*M)\subset \mathrm{Pns}({}^*M)\subset \mathrm{Fin}({}^*M)\subset{}^*M \tag{4}$$

若令 $\hat{M}^p=\mathrm{Pns}({}^*M)/\approx$，则有

定理 2.3 $\hat{M}^p=\overline{M}_\wedge$，从而 $\hat{M}^p$ 为 $\hat{M}$ 的完备子空间。

证明 显见 $M_\wedge\subset\hat{M}^p$，$\forall\ \hat{\underline{p}}\in\hat{M}^p$，则 $\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*M)$，即存在点列$\{p_n|n\in N\}\subset M$，及$\{r_n|n\in N\}\subset R_+$，$r_n\downarrow 0(n\to+\infty)$，使$\forall\ n\in N$，$d(\underline{p},p_n)<r_n$. 由式(2)，$\hat{d}(\hat{\underline{p}},\hat{p}_n)\leqslant r_n$. 故 $\hat{p}_n\xrightarrow{\hat{d}}\hat{\underline{p}}(n\to+\infty)$. 而$\{\hat{p}_n|n\in N\}\subset M_\wedge$，有$\hat{\underline{p}}\in\overline{M}_\wedge$，即 $\hat{M}^p\subset\overline{M}_\wedge$. 反之，$\forall\ \hat{\underline{p}}\in\overline{M}_\wedge$. 则有点列$\{p_n|n\in N\}\subset M$，使 $\hat{d}(\hat{\underline{p}},\hat{p}_n)\to 0(n\to+\infty)$，从而有${}^\circ d(\underline{p},p_n)\to 0(n\to+\infty)$. 从而必有子列$\{p_{n_k}|k\in N\}$，使$\forall\ k\in N$，有 $d(\underline{p},p_{n_k})<\frac{1}{k}$. 这样，$\underline{p}\in\bigcap_{k\in N}{}^*B\left(p_{n_k},\frac{1}{k}\right)$，即 $\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*M)$，$\hat{\underline{p}}\in\hat{M}^p$，从而 $\overline{M}_\wedge\subset\hat{M}^p$. 故 $\hat{M}^p=\overline{M}_\wedge$成立。

由上述定理 2.3，M 有一个完备化空间为 $\hat{M}$ 的子空间，那么何时 $\hat{M}$ 即为 M 的完备化空间呢？

定理 2.4 (M,d)为度量空间，若 $\mathrm{Pns}({}^*M)=\mathrm{Fin}({}^*M)$，则 $\hat{M}$ 为 M 的完备化空间。

证明 由(3)，只需证明 $M_\wedge$在 $\hat{M}$ 中稠密即可。若$\forall\ \hat{\underline{p}}\in\hat{M}$，则 $\underline{p}\in\mathrm{Fin}({}^*M)$，即有 $\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*M)$. 从而存在$\{p_n|n\in N\}\subset M$，及$\{r_n|n\in N\}\subset R_+$，$r_n\downarrow 0(n\to+\infty)$，使$\forall\ n\in N$，$d(p_n,\underline{p})<r_n$. 而$\{\hat{p}_n|n\in N\}\subset M_\wedge$.

$$\hat{d}(\hat{p}_n,\hat{\underline{p}})={}^\circ d(p_n,\underline{p})\leqslant{}^\circ r_n=r_n\to 0(n\to+\infty) \tag{5}$$

故 $\hat{p}_n\xrightarrow{\hat{d}}\hat{\underline{p}}(n\to+\infty)$，故 $M_\wedge$在 $\hat{M}$ 中稠，即 $\hat{M}$ 为 M 的完备化。

2 各种紧性的刻划

W. A. J. Luxemeburg 在文[1]中证明了一个拓扑空间 X 是紧的当且仅当${}^*X$ 中每一点均为近标准点，即 $\mathrm{ns}({}^*M)={}^*X$. 这非常简洁地描述紧性概念。

在定义 2.2 中，若将 $A\subset M$ 代替空间 M，则得${}^*A$ 的预近标准点及${}^*A$ 为预紧的定义。

命题 3.1 设(M,d)为度量空间，$A\subset M$. 则 $\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$当且仅当$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在 $p\in A$，使 $d(p,\underline{p})<\varepsilon$.

证明 $\Rightarrow$)$\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$，即有$\{p_n|n\in N\}\subset A$，$\{r_n|n\in N\}\subset R_+$，$r_n\downarrow 0(n\to+\infty)$，使 $\underline{p}\in\bigcap_{n\in N}{}^*B(p_n,r_n)$. 即$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在 $n_0\in N$，使 $r_{n_0}<\varepsilon$. 故由 $\underline{p}\in{}^*B(p_{n_0},r_{n_0})$，知 $d(p_{n_0},\underline{p})<\varepsilon$，取 $p=p_{n_0}\in A$ 即可。

$\Leftarrow$)由假设$\forall\ n\in N$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，存在 $p_n\in A$，使 $d(p_n,\underline{p})<\frac{1}{n}$，则得点列$\{p_n|n\in N\}\subset A$，且 $\underline{p}\in\bigcap_{n\in N}{}^*B\left(p_n,\frac{1}{n}\right)$，从而 $\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$.

下面的定理给出了全有界集与预紧集的关系。

定理 3.1 设(M,d)为度量空间，$A\subset M$，则 A 为全有界的当且仅当 $\mathrm{Pns}({}^*A)={}^*A$.

证明 设 A 为全有界，则$\forall\ k\in N$，A 中存在有限点列 $p_1,p_2,\cdots,p_{n_k}(n_k\in N)$，使 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n_k}B\left(p_i,\frac{1}{k}\right)$，从而有

$$ {}^*A\subset\bigcup_{i=1}^{n_k}{}^*B\left(p_i,\frac{1}{k}\right) \tag{6}$$

故$\forall\ \underline{p}\in{}^*A$，存在 $q_k\in\{p_1,p_2,\cdots,p_{n_k}\}$，使 $\underline{p}\in{}^*B\left(q_k,\frac{1}{k}\right)$。这样得点列$\{q_k|k\in N\}\subset A$，使 $\underline{p}\in\bigcap_{k\in N}{}^*B\left(q_n,\frac{1}{k}\right)$，即 $\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$，故${}^*A\subset\mathrm{Pns}({}^*A)$. 另一方面，显见 $\mathrm{Pns}({}^*A)\subset{}^*A$. 故 $\mathrm{Pns}({}^*A)={}^*A$.

反之，设 $\mathrm{Pns}({}^*A)={}^*A$. 若 A 不是全有界的，则存在 $\varepsilon_0\in R_+$，使 A 的任何有限集均不是 A 的 ε_0—网。设

$$\mathscr{P}=\{X|\ 存在\ p_1,\cdots,p_n\in A,\ 使\ X\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(p_i,\varepsilon_0)\} \tag{7}$$

定义 $\mathscr{P}\times A$ 上的二元关系 $\mathscr{R}$：

$$\mathscr{R}=\{(X,p)|X\in\mathscr{P},p\in A,p\overline{\in}X\} \tag{8}$$

则$\forall\ X\in\mathscr{P}$，必存在 $p\in A$，使 $p\overline{\in}X$，否则由此 X 即可得到 A 的一个有限 ε_0—网，从而 $\mathrm{dom}(\mathscr{R})=\mathscr{P}$. 下证 $\mathscr{R}$ 是共尾的。事实上，$\forall\ X_1,\cdots,X_m\in\mathscr{P}$，则 $A\not\subset\bigcup_{i=1}^{m}X_i$，否则可得到 A 的一个有限 ε_0—网。从而存在 $p_0\in A\setminus\bigcup_{i=1}^{m}X_i$，即

$$(X_i,P_0)\in\mathscr{R}\quad i=1,2,\cdots,m \tag{9}$$

从而$\mathscr{R}$是共尾关系，由共点定理，存在 $\underline{p_0}\in{}^*V(S)$，使得$\forall\ X\in\mathscr{P}$，$({}^*X,\underline{p_0})\in{}^*\mathscr{R}$. 而$\mathscr{R}\subset\mathscr{P}\times A$，故${}^*\mathscr{R}\subset{}^*\mathscr{P}\times{}^*A$，$\underline{p_0}\in{}^*A=\mathrm{Pns}({}^*A)$. 而$\forall\ X\in\mathscr{P}$，$\models(\forall\ p\in A,(X,p)\in\mathscr{R}\Rightarrow p\overline{\in}X)$，故由转换原理：${}^*\models(\forall\ p\in{}^*A,\ ({}^*X,p)\in{}^*\mathscr{R}\Rightarrow p\overline{\in}{}^*X)$. 特别有$\forall\ X\in\mathscr{P}$，$\underline{p_0}\overline{\in}{}^*X$. 但另一方面，由于 $\underline{p_0}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$，故对上述 $\varepsilon_0\in R_+$，由命题 3.1，存在 $q\in A$，使 $d(\underline{p_0},\underline{q})<\varepsilon_0$ 即 $\underline{p_0}\in{}^*B(q,\varepsilon_0)$，而显见 $B(q,\varepsilon_0)\in\mathscr{P}$，这是个矛盾，故 A 全有界。（证毕）

这样，一个度量空间 M 为全有界的当且仅当${}^*M=\mathrm{Pns}({}^*M)$，这完全类似于紧的描述。

定理 3.2 设(M,d)为度量空间，则(M,d)全有界当且仅当$(\hat{M},\hat{d})$是全有界的。

证明 $\Rightarrow$）设(M,d)为全有界，则$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在 $n\in N$，及有限点列$\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}\subset M$，使 $M\subset\bigcup_{i=1}^{n}B\left(p_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. 下证

$$\hat{M}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\hat{B}(\hat{p}_i,\varepsilon) \tag{10}$$

事实上，$\forall\ \hat{\underline{p}}\in\hat{M}$，由定理 3.1，$\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*M)$. 故存在 $p\in M$，使 $d(\underline{p},p)<\frac{\varepsilon}{2}$. 而由 $p\in\bigcup_{i=1}^{n}B\left(p_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)$知，存在 $j:1\leqslant j\leqslant n$，使 $p\in B\left(p_j,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，故有 $\hat{d}(\hat{p}_j,\hat{\underline{p}})\leqslant\hat{d}(\hat{p}_j,\hat{p})+\hat{d}(\hat{p},\hat{\underline{p}})=d(p_j,p)+{}^\circ d(p,q)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 从而$\hat{\underline{p}}\in\hat{B}(\hat{p}_j,\varepsilon)$，即$\hat{\underline{p}}\in\bigcup_{i=1}^{n}\hat{B}(\hat{p}_i,\varepsilon)$，故(10)成立。从而$(\hat{M},\hat{d})$为全有界的。

反之，由于 $M_\wedge\subset\hat{M}$，$\hat{M}$ 全有界，故 $M_\wedge$ 也是全有界的。$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在有限点列$\{\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_n\}\subset M_\wedge$，使得 $M_\wedge\subset\bigcup_{i=1}^{n}\hat{B}(\hat{p}_i,\varepsilon)$，则易验证 $M\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(p_i,\varepsilon)$，即$(M,d)$全有界。定理证毕。

若 $A\subset M$，且 A 中元素有无限个，则称 A 为 M 的无限子集。

定义 3.1 设 $Q\subset{}^*M$，$\underline{p}\in Q$，称 $\underline{p}$ 为 Q 的紧点是指：$\underline{p}\in\mathrm{ns}({}^*M)$；若$\forall\ \underline{p}\in Q$，$\underline{p}$ 为 Q 的紧点，则称 Q 为几乎紧集。

记 $\mathrm{com}(Q)$为 Q 的全体紧点之集，则易验证：$\mathrm{com}({}^*M)=\mathrm{ns}({}^*M)$，并对 $A\subset M$，有

$$A \subset \mathrm{ns}({}^*A) \subset \mathrm{com}({}^*A) \subset \mathrm{Pns}({}^*A) \subset \mathrm{Fin}({}^*A) \subset {}^*A \qquad (11)$$

命题 3.2 $A\subset M$，则 A 为闭集当且仅当 $\mathrm{com}({}^*A)=\mathrm{ns}({}^*A)$.

证明 $\Rightarrow$）$\forall\ \underline{p}\in \mathrm{com}({}^*A)$，则有 $p\in M$，使 $d(\underline{p},p)\approx 0$. 而 $\forall\ n\in N$，则 $\underline{p}\in {}^*A\cap {}^*B\left(p,\frac{1}{n}\right)$，从而 $B\left(p,\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\phi$，设 $p_n\in B\left(p,\frac{1}{n}\right)\cap A$，则得点列 $\{p_n|n\in N\}\subset A$，$d(p_n,p)<\frac{1}{n}$ $(\forall\ n\in N)$，即 $p_n \xrightarrow{d} p(n\to+\infty)$，从而 $p\in\overline{A}=A$. 即 $\underline{p}\in \mathrm{ns}({}^*A)$，故 $\mathrm{com}({}^*A)\subset\mathrm{ns}({}^*A)$，由(11)，$\mathrm{com}({}^*A)=\mathrm{ns}({}^*A)$.

$\Leftarrow$）$\forall\ p\in\overline{A}$，则有 $\{p_n|n\in N\}\subset A$，使 $p_n\xrightarrow{d}p(n\to+\infty)$，将 $\{p_n|n\in N\}$ 在 ${}^*A$ 中扩充为内序列 $\{p_n|n\in {}^*N\}$，则对 $H\in {}^*N\backslash N$，$d(p_H,p)\approx 0$，从而 $p_H\in\mathrm{com}({}^*A)=\mathrm{ns}({}^*A)$，故 $p={}^\circ p_H\in A$，即 $\overline{A}\subset A$，A 为闭集。（证毕）

定理 3.3 $A\subset M$，且 ${}^*A$ 为几乎紧集，则 A 是全有界的。

证明 由于 ${}^*A$ 为几乎紧集的，从而 $\mathrm{com}({}^*A)={}^*A$. 由(11)知，$\mathrm{Pns}({}^*A)={}^*A$. 由定理 3.1，$A$ 为全有界的。

下面定理给出了列紧集的非标准特征。

定理 3.4 设 $A\subset M$，A 为列紧的当且仅当 ${}^*A$ 是几乎紧集。

证明 对于有限集 $A\subset M$，结论显然，设 A 为 M 的无限子集。若 A 是列紧的，则 A 全有界。由定理 3.1，$\forall\ \underline{p}\in {}^*A$，$\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$. 由命题 3.1，$\forall\ n\in N$，存在 $p_n\in A$，使得 $d(p_n,\underline{p})<\frac{1}{n}$. 这样得点列 $\{p_n|n\in N\}\subset A$，且 ${}^\circ d(p_n,\underline{p})\to 0$，$(n\to+\infty)$. 由于 A 列紧，则 $\{p_n|n\in N\}$ 存在收敛子列，不妨设其为本身，即存在 $p\in M$，使 $d(p_n,p)\to 0(n\to+\infty)$. 从而

$$ {}^\circ d(p,\underline{p}) \leqslant {}^\circ d(p_n,\underline{p}) + {}^\circ d(p,p_n) \to 0\ (n\to+\infty) \qquad (12)$$

即 $d(p,\underline{p})\approx 0$. 故 $\underline{p}\in\mathrm{com}({}^*A)$，从而 ${}^*A$ 是几乎紧集。

反之，设 ${}^*A$ 是几乎紧集，即 $\mathrm{com}({}^*A)={}^*A$. 若 A 在 M 中无聚点，则 $\forall\ p\in M$，存在 $\varepsilon\in R_+$，使得：

$$A\cap(B(p,\varepsilon)\backslash\{p\})=\phi\Rightarrow {}^*A\cap({}^*B(p,\varepsilon)\backslash\{p\})=\phi \qquad (13)$$

由于 A 为无限集，故对 $\underline{p}\in {}^*A\backslash A$，有 $\underline{p}\in\mathrm{com}({}^*A)$，即存在 $p_0\in M$，$d(\underline{p},p_0)\approx 0$，且 $p_0\neq\underline{p}$. 从而 $\forall\ \varepsilon\in R_+$，$\underline{p}\in {}^*A\cap({}^*B(p_0,\varepsilon)\backslash\{p_0\})$. 这与(13)矛盾。故 A 在 M 中至少有一个聚点，令

$$\varphi=\{X|X\subset A，且\ X\ 为列紧集\} \qquad (14)$$

则 $\varphi\neq\phi$. 又若 A 不是列紧集，则定义关系：

$$\mathscr{R}_1=\{(X,p)|X\in\varphi,\ p\in A,\ p\ \overline{\in}\ X\} \qquad (15)$$

若 $X\in\varphi$，则必有 $p\in A\backslash X$，否则 A 即为列紧集，故有 $\mathrm{dom}(\mathscr{R}_1)=\varphi$.

下证 $\mathscr{R}_1$ 是共尾关系，若 $X_1,\cdots,X_m\in\varphi$，则 $\bigcup_{i=1}^{m}X_i$ 是列紧的，故必有 $p_0\in A\backslash\bigcup_{i=1}^{m}X_i$，从而

$$(X_i,p_0)\in\mathscr{R}_1\quad(i=1,\cdots,m) \qquad (16)$$

故 $\mathscr{R}_1$ 是共尾的。由共点定理，存在 $\underline{p_0}\in {}^*V(S)$，使得 $\forall\ X\in\varphi$，$({}^*X,\underline{p_0})\in {}^*\mathscr{R}_1$. 又 $\mathscr{R}_1\subset\varphi\times A$，故 ${}^*\mathscr{R}_1\subset {}^*\varphi\times {}^*A$，从而 $\underline{p_0}\in {}^*A$. 又 $\forall\ X\in\varphi$，$\models\forall\ p\in A,(X,p)\in\mathscr{R}_1\Rightarrow p\ \overline{\in}\ X$；由转换原理得：${}^*\models\forall\ p\in {}^*A$，$({}^*X,p)\in {}^*\mathscr{R}_1\Rightarrow p\ \overline{\in}\ {}^*X$. 特殊地，$\forall\ X\in\varphi$，$\underline{p_0}\ \overline{\in}\ {}^*X$，从而 $\underline{p_0}\ \overline{\in}\ \mathrm{Pns}({}^*X)$. 由命题 3.1，存在 $\varepsilon_0\in R_+$，使

$$\forall\ p\in X\Rightarrow d(\underline{p_0},p)\geqslant\varepsilon_0 \qquad (17)$$

但由 $\underline{p_0}\in {}^*A=\mathrm{com}({}^*A)$，则有 $p'\in M$，使 $d(\underline{p_0},p')\approx 0$，从而 $\forall\ n\in N$，$\underline{p_0}\in {}^*A\cap {}^*B\left(p',\frac{1}{n}\right)\neq\phi$. 故 $A\cap B\left(p',\frac{1}{n}\right)\neq\phi$，令 $p_n\in A\cap B\left(p',\frac{1}{n}\right)$，则 $\{p_n|n\in N\}\subset A$，且 $d(p_n,p')<\frac{1}{n}\to 0(n\to+\infty)$. 即 $p_n\xrightarrow{d}p'(n\to+\infty)$. 若取 $X=\{p_n|n\in N\}$，则 $X\in\varphi$，但 ${}^\circ d(p_n,\underline{p_0})\leqslant{}^\circ d(p_n,p')+{}^\circ d(p',\underline{p_0})\to 0(n\to+\infty)$.

这与(17)矛盾，从而 A 是列紧的。(证毕)

由定理 3.4，$A\subset M$ 列紧当且仅当 ${}^*A=\mathrm{com}({}^*A)$. 下面我们给出泛函分析中几个定理的简洁证明。

推论 3.1 若 $A\subset M$，则 A 为列紧闭集当且仅当 A 是紧集。

证明 因$\Rightarrow$) A 为列紧的，故 ${}^*A=\mathrm{com}({}^*A)$；而 A 又是闭的，故由命题 3.2，$\mathrm{com}({}^*A)=\mathrm{ns}({}^*A)$. 从而 ${}^*A=\mathrm{ns}({}^*A)$，即 A 是紧集。

若$\Leftarrow$). A 为紧集，则 ${}^*A=\mathrm{ns}({}^*A)$. 由(11)，${}^*A=\mathrm{com}({}^*A)=\mathrm{ns}({}^*A)$. 故由命题 3.2，$A$ 为闭的且列紧的。(证毕)

推论 3.2 设 (M,d) 为完备度量空间，$A\subset M$，则 A 全有界当且仅当 A 列紧。

证明 $\Rightarrow$) 设 A 全有界，则 ${}^*A=\mathrm{Pns}({}^*A)$. 故 $\forall\ \underline{p}\in{}^*A,\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*A)$. 由命题 3.1，存在 $\{p_n|n\in N\}\subset A$，使 $\forall\ n\in N$，$d(p_n,\underline{p})<\dfrac{1}{n}$. 从而 $\{p_n|n\in N\}$ 为 A 中 Canchy 列，由 (M,d) 完备，故有 $p\in M$，使 $p_n\xrightarrow{d}p(n\to+\infty)$，从而

$$^{\circ}d(\underline{p},p)\leqslant{}^{\circ}d(\underline{p},p_n)+{}^{\circ}d(p_n,p)<\frac{1}{n}+d(p_n,p)\to 0(n\to+\infty)$$

即 $d(\underline{p},p)\approx 0$. 故 $\underline{p}\in\mathrm{com}({}^*A)$，这样 $\mathrm{com}({}^*A)\supset{}^*A$，即 ${}^*A=\mathrm{com}({}^*A)$，故 A 是列紧的。

$\Leftarrow$) A 列紧，知 ${}^*A=\mathrm{com}({}^*A)$，由(11)，${}^*A=\mathrm{Pns}({}^*A)$，即 A 全有界。

3 Arzela-Ascoli 定理与不动点定理

本节利用前面诸结果，给出 Arzela-Ascoli 定理的非标准条件和它的一个非标准证明，得到了一个比经典 Banach 不动点定理条件要弱的压缩映射原理。

设 (M,d) 为一个紧的度量空间，而 $C(M)$ 表示 $M\to R$ 的全体连续映射之集。

定义 4.1 设 $A\subset C(M)$，称 A 是一致有界的是指：存在 $K>0$，使 $\forall\ p\in M,\forall\ \varphi\in A$，有 $|\varphi(p)|\leqslant K$；称 A 是等度连续的是指：$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在 $\delta\in R_+$，使 $\forall\ p_1,p_2\in M$，$d(p_1,p_2)<\delta$ 时，$\forall\ \varphi\in A$，有 $|\varphi(p_1)-\varphi(p_2)|<\varepsilon$.

$\forall\ \varphi_1,\varphi_2\in C(M)$，定义度量 ρ: $C(M)\times C(M)\to R_+\cup\{0\}$：

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\max_{p\in M}|\varphi_1(p)-\varphi_2(p)| \tag{18}$$

易验证：$(C(M),\rho)$ 为一个度量空间。

定理 4.1 (Arzela-Ascoli) 设 $A\subset C(M)$，则下列条件等价：

(1) A 是列紧集；

(2) $\forall\ \underline{\varphi}\in{}^*A$，存在 $\varphi\in C(M)$，使 $\rho(\underline{\varphi},{}^*\varphi)=\max\limits_{p\in{}^*M}|\underline{\varphi}(p)-{}^*\varphi(p)|\approx 0$；

(3) A 为一致有界且是等度连续的。

证明 由定理 3.4，(1)与(2)等价。下证(2)(3)等价。

(2)$\Rightarrow$(3)：由于 $\varphi\in C(M)$，φ 在 M 上有界，即存在 $K_1>0$，使 $|\varphi(p)|\leqslant K_1(\forall\ p\in M)$，故由转换原理，$\forall\ p\in{}^*M$，$|{}^*\varphi(p)|\leqslant K_1$. 又由 $\max\limits_{p\in{}^*M}|\underline{\varphi}(p)-{}^*\varphi(p)|\approx 0$，知 $\max\limits_{p\in{}^*M}|\underline{\varphi}(p)|\leqslant K_1+1$. 记

$$D=\{n\in{}^*N|\forall\ \underline{\varphi}\in{}^*A,\max_{p\in{}^*M}|\underline{\varphi}(p)|\leqslant n\} \tag{19}$$

则 D 为内集，且 $D\supset{}^*N\backslash N$，从而由下溢原理，存在 $n_0\in N$，使 $n_0\in D$，即 ${}^*\models\forall\ \underline{\varphi}\in{}^*A\ \max\limits_{p\in{}^*M}|\underline{\varphi}(p)|\leqslant n_0$. 由转换原理知，$\forall\ \varphi\in A$，$\max\limits_{p\in M}|\varphi(p)|\leqslant n_0$，即 A 一致有界。

任取 $\underline{\varphi}\in{}^*A$，$\varphi\in C(M)$，使 $\rho(\underline{\varphi},{}^*\varphi)\approx 0$. 由 φ 在 M 上的一致连续性知，$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在 $\delta\in R_+$，由转换原理有：

$${}^*\models\forall\ p_1,p_2\in{}^*M,\ d(p_1,p_2)<\delta\Rightarrow|{}^*\varphi(p_1)-{}^*\varphi(p_2)|<\varepsilon/2 \tag{20}$$

从而$\forall\ p_1,p_2\in {}^*M$，当$d(p_1,p_2)<\delta$时，由(20)式有：

$$
\begin{aligned}
{}^\circ|\underline{\varphi}(p_1)-\underline{\varphi}(p_2)| &\leqslant {}^\circ|\underline{\varphi}(p_1)-{}^*\varphi(p_1)|+{}^\circ|{}^*\varphi(p_1)-{}^*\varphi(p_2)|+{}^\circ|{}^*\varphi(p_2)-\underline{\varphi}(p_2)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

故令

$$D_1=\{n\in {}^*N\mid \forall\ \underline{\varphi}\in {}^*A,\forall\ p_1,p_2\in {}^*M,d(p_1,p_2)<\frac{1}{n}\Rightarrow|\underline{\varphi}(p_1)-\underline{\varphi}(p_2)|<\varepsilon\} \tag{21}$$

则D_1为内集，且$D_1\supset {}^*N\backslash N$，故有$m_0\in N$，使$m_0\in D_1$. 从而由转换原理知：

$$\models\forall\ \varphi\in A,\ \forall\ p_1,p_2\in M,d(p_1,p_2)<\frac{1}{m_0}\Rightarrow|\varphi(p_1)-\varphi(p_2)|<\varepsilon \tag{22}$$

此即A是等度连续的，即(3)成立。

(3)$\Rightarrow$(2)：由于A一致有界，故有$K\in R_+$，由转换原理，有${}^*\models\forall\ \underline{\varphi}\in {}^*A$，$\max\limits_{p\in {}^*M}|\underline{\varphi}(p)|\leqslant K$. 从而$\forall\in\underline{\varphi}\in {}^*A$，$\forall\ p\in {}^*M$，${}^\circ(\underline{\varphi}(p))$存在且有限，定义$\varphi:M\to R$，使$\forall\ p\in M$，$\varphi(p)={}^\circ(\underline{\varphi}(p))$. 由$A$等度连续，故$\forall\ \varepsilon\in R_+$，存在$\delta\in R_+$. 由转换原理有

$${}^*\models\forall\ \underline{\psi}\in {}^*A,\ \forall\ p_1,p_2\in {}^*M,d(p_1,p_2)<\delta\Rightarrow|\underline{\psi}(p_1)-\underline{\psi}(p_2)|<\varepsilon \tag{23}$$

从而$\forall\ p_1,p_2\in M,d(p_1,p_2)<\delta$时，对$\underline{\varphi}\in {}^*A$，由(23)得

$$|\varphi(p_1)-\varphi(p_2)|={}^\circ|\underline{\varphi}(p_1)-\underline{\varphi}(p_2)|\leqslant\varepsilon \tag{24}$$

从而φ在M上一致连续，$\varphi\in C(M)$. 又由M为紧的，故$\mathrm{ns}({}^*M)={}^*M$. $\forall\ \underline{p}\in {}^*M$，存在$p\in M$，使$d(\underline{p},p)\approx 0$. 故由式(23)有$\underline{\varphi}(\underline{p})\approx\underline{\varphi}(p)$. φ在M上一致连续$\Rightarrow {}^*\varphi$在${}^*M$上S－连续，从而${}^*\varphi(\underline{p})\approx {}^*\varphi(p)=\varphi(p)$，故

$${}^\circ|\underline{\varphi}(\underline{p})-{}^*\varphi(\underline{p})|\leqslant {}^\circ|\underline{\varphi}(\underline{p})-\underline{\varphi}(p)|+{}^\circ|\underline{\varphi}(p)-\varphi(p)|+{}^\circ|\varphi(p)-{}^*\varphi(\underline{p})|=0$$

从而$\forall\ \varepsilon\in R_+$，$\max\limits_{p\in {}^*M}|\underline{\varphi}(p)-{}^*\varphi(p)|<\varepsilon$，即$\rho(\underline{\varphi},{}^*\varphi)\approx 0$，故(2)成立。(证毕)

对于度量空间(M,d)，设有映射$T:M\to M$，若存在$\lambda:0<\lambda<1$，使$\forall\ p,q\in M$，$d(Tp,Tq)\leqslant\lambda\cdot d(p,q)$，则称$T$为一个压缩映射。Banach不动点定理断言在完备度量空间中，压缩映射T必有唯一不动点。下面我们讨论在一个非完备度量空间中，压缩映射不动点的情况。

定义 4.2 设算子$\underline{T}:{}^*M\to {}^*M$，称$\underline{T}$是预紧算子是指：若$\forall\ \underline{p}\in \mathrm{Pns}({}^*M)$，则$\underline{T}\underline{p}\in \mathrm{com}({}^*M)$. 即一个预紧算子把预近标准点映成预紧点。

命题 4.1 若(M,d)为完备度量空间，且$T:M\to M$为压缩映射，则${}^*T:{}^*M\to {}^*M$为预紧算子。

证明 $\forall\ \underline{p}\in \mathrm{Pns}({}^*M)$，则由命题3.1，存在$\{p_n\mid n\in N\}\subset M$，使$\forall\ n\in N$，$d(p_n,\underline{p})<\frac{1}{n}$. 又$T$为压缩映射，故存在$\lambda\in(0,1)$，由转换原理有：$d({}^*T\underline{p_1},{}^*T\underline{p_2})\leqslant\lambda\cdot d(\underline{p_1},\underline{p_2})(\forall\ \underline{p_1},\underline{p_2}\in {}^*M)$. 故

$$\forall\ n\in N,\ d({}^*Tp_n,{}^*T\underline{p})\leqslant\lambda\cdot d(p_n,\underline{p}),<\frac{\lambda}{n}<\frac{1}{n} \tag{25}$$

而$\forall\ n\in N$，${}^*Tp_n=Tp_n\in M$，且由(25)，$\{Tp_n\mid n\in N\}$为一个Cauchy列，由于M完备，故有$p\in M$，使$d(Tp_n,p)\to 0(n\to+\infty)$，从而

$${}^\circ d(p,{}^*T\underline{p})\leqslant {}^\circ d(p,{}^*Tp_n)+{}^\circ d({}^*Tp_n,{}^*T\underline{p})\leqslant d(Tp_n,p)+\frac{1}{n}\to 0\ (n\to+\infty)$$

故${}^\circ d(p,{}^*T\underline{p})\approx 0$，即${}^*T\underline{p}\in \mathrm{com}({}^*M)$，从而${}^*T$为预紧算子。

定理 4.2 设(M,d)为度量空间，$T:M\to M$为压缩映射，且${}^*T:{}^*M\to {}^*M$为预紧算子，则T在M中有唯一不动点。

证明 由定理2.3，$\hat{M}^P$为$\hat{M}$的完备子空间，定义$({}^*T)^\wedge:\hat{M}^P\to\hat{M}^P$，使得

$$\forall\ \hat{\underline{p}}\in\hat{M}^P\quad({}^*T)^\wedge(\hat{\underline{p}})=({}^*T\underline{p})^\wedge \tag{26}$$

由于$\hat{p}\in\hat{M}^p$，$\underline{p}\in\mathrm{Pns}({}^*M)$，且${}^*T$为预紧算子，则${}^*T(\underline{p})\in\mathrm{com}({}^*M)\subset\mathrm{Pns}({}^*M)$. 由$T$为压缩映射，故有$k\in(0,1)$，使$\forall\ \underline{p},\underline{q}\in{}^*M$，$d({}^*T\,\underline{p},{}^*T\,\underline{q})\leqslant k\cdot d(\underline{p},\underline{q})$. 这样定义(26)有意义。

$$\forall\ \hat{\underline{p}}_1,\hat{\underline{p}}_2\in\hat{M}^p,\quad \hat{d}(({}^*T)^\wedge(\hat{\underline{p}}_1),({}^*T)^\wedge(\hat{\underline{p}}_2))=\hat{d}(({}^*T\,\underline{p}_1)^\wedge,({}^*T\,\underline{p}_2)^\wedge)={}^\circ d({}^*T\underline{p}_1,{}^*T\underline{p}_2)$$
$$\leqslant k\cdot{}^\circ d(\underline{p}_1,\underline{p}_2)=k\cdot\hat{d}(\hat{\underline{p}}_1,\hat{\underline{p}}_2) \tag{27}$$

从而$({}^*T)^\wedge$为$\hat{M}^p$上的压缩映射。由 Banach 不动点定理，有$\hat{\underline{p}}_0\in\hat{M}^p$，使$({}^*T)^\wedge(\hat{\underline{p}}_0)=\hat{\underline{p}}_0$. 而${}^*T(\underline{p}_0)\in\mathrm{com}({}^*M)$，则有$p_0\in M$，使$d({}^*T(\underline{p}_0),p_0)\approx 0$，从而$({}^*T)^\wedge(\hat{\underline{p}}_0)=({}^*T\,\underline{p}_0)^\wedge=\hat{p}_0=\hat{\underline{p}}_0$. 故$d(p_0,\underline{p}_0)\approx 0$. $Tp_0={}^*Tp_0\approx{}^*T\,\underline{p}_0$，即$(Tp_0)^\wedge=({}^*Tp_0)^\wedge=\hat{p}_0$，从而$Tp_0=p_0$，即$p_0$为$T$的不动点。若另有$p_1\in M$为$T$的不动点，则$d(p_1,p)=d(Tp_1,Tp)\leqslant k\cdot d(p_1,p)$. 故$d(p_1,p)=0$，$p_0=p$. 唯一性得证。(证毕)

注：由命题 4.1 与定理 4.2 知，定理 4.2 条件比 Banach 不动点定理条件要弱。

参 考 文 献

1 W A J Luxemburg. A General Theory of Monads. In Applications of Model theory to Algebra, Analysis and probability. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969: 15～86

2 C W Henson, L C Moore, Jr. Nonstandard Analysis and the Theory of Banach Spaces. In Nonstandard Analysis-Recent Development, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York Tokyo, 1983.

3 C W Henson, L C Moore Jr. Trans Amer Math Soc, 1972, 172: 405-435

4 C W Henson. Duke Math J, 1974, 4(2): 277～284

5 H Render. Trans Amer Math Soc, 1993, 336(1): 101～119

6 D Cozart, L C Moore Jr. Duke Math J, 1974, 41(2): 263～275

7 Kϕsaku Yosida. Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, 1969

8 金治明，刘普寅．非标准测度论与随机分析，国防科技大学讲义，1993

9 M. Davis. Applied Nonstandard Analysis, Wiley New York, 1979

The Nonstandard Character of Metric Spaces

Liu Puyin

(Department of Systems Engineering and Mathematics)

Abstract

In the paper, We first introduce the definition of the nonstandard hull of a metric space. Many properties of the nonstandard hull are obtained. After that, with the nonstandard method, We describe a few of compact properties in a metric space. Finally with these conclusions, Arzela-Ascoli theorem is proved, and Banach fixed pointed theorem is obtained under the weaker conditions.

Key words Nonstandard hull, Pre-nearstandard point, pre-compact set Pre-compact operator, Almost-compact set