国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第17卷第1期 1995年3月 Vol. 17 No. 1

含收益带费用的校对问题的最优停止*

李弼程 罗建书
（国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073）

摘 要 在假定每次校对费用可能不一样且带来一定收益的条件下，讨论了校对问题的最优停止，给出了Poisson模型与二项模型的最优停时。

关键词 最优停时；有限情形；单调情形
分类号 O211.6

1 模型的提出

设一篇打印稿件有 N 个错误，N 是非负随机变量，且 $EN<\infty$. 为了提高稿件的质量，现通过相继的 n 次校对来发现并改正错误，设第 k 次校对的费用为 $c_k(>0)(k=1,2\cdots)$。通过 k 次校对后仍未发现的每个错误具有损失费用 $d_k>0(k=1,2,\cdots)$。$d=\sup\limits_k d_k<\infty$. 由于稿件质量上有提高，当然要获得一定的收益，假设每发现并改正一个错误获得收益为 $\beta(\beta\geqslant 0)$。记 x_k 为第 k 次校对发现的前 $k-1$ 次没有发现过的错误，设在给定 N，x_1，$\cdots$，x_{k-1}时，x_k 的条件分布为二项分布 $B(N_{k-1},p_k)$。其中 $N_{k-1}=N-\sum\limits_{i=1}^{k-1}x_i$，$p_k$ 是第 k 次校对中发现每个错误的概率。第 k 次校对后报酬函数为

$$y_k=\beta s_k-g(k)-d_kE\{N_k|x_1,\cdots x_k\} \tag{1}$$

其中 $g(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}c_i$ 表示校对 k 次的费用。$s_k=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i$. 文献[2]中讨论了在每次校对费用为常数且收益为0(即 $c_k=c$，$\beta=0$)的条件下的最优停止。本文推广了文[2]中的结果，使模型更切合实际。

设概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)N$ 是 $\mathscr{F}$ 可测的。$\mathscr{F}_n=\sigma(x_1,\cdots,x_n)$，$\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}$. 随机变量 τ 称为停时，如果$\forall\ n=1,2,\cdots(\tau=n)\in\mathscr{F}_n$.

记 $\mathscr{T}=\{\tau,\tau$ 是停时，$P(\tau<\infty)=1$，$Ey_\tau^-<\infty\}$。要求 $\tau^*\in\mathscr{T}$，使得 $Ey_{\tau^*}=\sup\limits_{\tau\in\mathscr{T}}Ey_\tau$. τ^* 称为最优停时。

首先证明一个引理：

* 国家自然科学基金资助项目
1993年12月28日收稿

引理 1 $\{\mathscr{F}_n\}$停时 $\tau\in\mathscr{T}$ 的充分必要条件是 $P(\tau<\infty)=1$，且 $Eg(\tau)<\infty$

证明 令 $z_n=\beta s_n-d_nE\ \{N_n|\mathscr{F}_n\}$

则 $$y_n^-=\begin{cases}g(n)-z_n, & g(n)\geqslant z_n\\ 0, & g(n)<z_n\end{cases}$$

设 $\tau<\infty.\ a\cdot e.$

$$E|z_\tau|=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\tau=n}|z_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\tau=n)}[\beta N+dE\{N|\mathscr{F}_n\}]=(\beta+d)EN<\infty$$

因为 $g(n)-z_n\leqslant y_n^-\leqslant g(n)+d_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}\leqslant g(n)_1+dE\{N|\mathscr{F}_n\}$

故有 $Ey_\tau^-\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\tau=n)}[g(n)+dE\{N|\mathscr{F}_n\}]=Eg(\tau)+EN$

及 $Ey_\tau^-\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\tau=n)}[g(n)-z_n]=Eg(\tau)-Ez_\tau\geqslant Eg(\tau)-E|z_\tau|$

所以 $$Ey_\tau^-<\infty\Leftrightarrow Eg(\tau)<\infty$$
$$\tau\in\mathscr{T}\Leftrightarrow P(\tau<\infty)=1,\quad Eg(\tau)<\infty$$

2 问题的一般解

对于报酬序列(1)，记 $\mathscr{T}_n=\{\tau\in\mathscr{T},\tau\geqslant n\}$，$\gamma_n=\underset{\tau\in\mathscr{T}_n}{\operatorname{esssup}}E\{y_\tau|\mathscr{F}_n\}$，$v_n=\sup_{\tau\in\mathscr{T}_n}Ey_\tau$，$v=v_1$. 则由文[3]得

$$\gamma_n=y_n\vee E\{r_{n+1}|\mathscr{F}_n\},\ v_n=E\gamma_n\quad n=1,2,\cdots$$

对于有限情形 $\{y_1,\cdots,y_k\}$，即最多校对 k 次就停止，记 $\mathscr{T}_n^k=\{\tau\in\mathscr{T}_n,\ \tau\leqslant k\}$，$\gamma_n^k=\underset{\tau\in\mathscr{T}_n^k}{\operatorname{esssup}}E\{y_\tau|\mathscr{F}n\}$

$$v_n^k=\sup_{\tau\in\mathscr{T}_n^k}Ey_\tau,\quad v^k=v_1^k$$

则由文[3]得：$\gamma_n^k=y_n\vee E\{\gamma_{n+1}^k|\mathscr{F}_n\}$，$n=1,2,\cdots,k-1$

$$\gamma_k^k=y_k,\quad v_n^k=E\gamma_n^k$$

令 $\sigma^k=\inf\{k\geqslant n\geqslant 1,\ \gamma_n^k=y_n\}$，则由文[3]得 $Ey_{\sigma k}=v^k$

显然，$v_n^n\leqslant v_n^{n+1}\leqslant\cdots\leqslant v_n$

$$y_n\leqslant\gamma_n^n\leqslant\gamma_n^{n+1}\leqslant\cdots\leqslant\gamma_n$$

于是 $v_n'\triangleq\lim_{k\to\infty}v_n^k$，$\gamma_n'\triangleq\lim_{k\to\infty}\gamma_n^k$ 存在。

引理 2 设 $d=\sup_k d_k<\infty$ 则 $\gamma_n'=\gamma_n$，$v_n'=v_n$

证明 令 $x_n'=-d_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}$，$x_n''=g(n)-\beta s_n$，显然 x_n',x_n''都是 $\mathscr{F}_n$ 一可测。

因为 $(x_n')^-=d_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}\leqslant dE\{N|\mathscr{F}_n\}$，$EN<\infty$，所以 $(x_n')^-$一致可积。

另外 $x_n''\leqslant g(n)$，$\{g(n)\}$ 非负递增且 $\forall\ t\in\mathscr{T}$ $Eg(t)<\infty$，所以由文[3]中定理 4.4 有：$\gamma_n'=\gamma_n$

由单调收敛定理：

$$v_n'=\lim_{k\to\infty}v_n^k=\lim_{k\to\infty}E\gamma_n^k=E\gamma_n'=E\gamma_n=v_n$$

令 $\sigma=\inf\{n\geqslant 1,\ y_n=\gamma_n\}$

引理 3 设 $E\sup\limits_n y_n^+<\infty$，若 $P(\sigma<\infty)=1$，则 σ 是最优停时，为了 $P(\sigma<\infty)=1$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$.

证明见 [3] P82.

引理 4 若 $\forall\ n=1,2,\cdots,\ \gamma_n=r_n$ 则 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$.

证明见文 [3]。

有了上面的准备，我们有如下定理。

定理 1 设 $d=\sup\limits_k d_k<\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=\infty$，则 σ 是最优的，且 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$.

证明 由引理 2 和引理 4 有 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$. 要证 σ 是最优停时，根据引理 3，只要证明：

$$E\sup y_n^+<\infty,\quad 且\ \lim_{n\to\infty}y_n=-\infty$$

因为 $y_n=\beta s_n-g(n)-d_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}$

所以 $y_n^+\leqslant\beta s_n\leqslant\beta N$

$E\sup y_n^+\leqslant\beta EN<\infty$

由 $EN<\infty$ 有 $N<\infty.\ a\cdot e$

因为 $\beta s_n\leqslant\beta N<\infty\quad a\cdot e\quad d_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}\leqslant dE\{N|\mathscr{F}_n\}<\infty\quad a\cdot e$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty\quad a\cdot e$

记 $A_n=\{E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}\ n=1,2,\cdots$。若 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$，且 $P(\bigcup\limits_n A_n)=1$，则称 $\{y_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 属于单调情形。

文[2]中证明了 $E\{x_{n+1}|\mathscr{F}n\}=p_{n+1}E\{N_n|\mathscr{F}_n\}$，$n=1,2,\cdots$。容易验证 $E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=y_n+(d_n-d_{n+1}+\beta p_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1})E\{N_n|\mathscr{F}_n\}-C_{n+1}$. 记 $a_n\triangleq d_n-d_{n+1}+\beta p_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1}$，则 $A_n=\{a_nE\{N_n\backslash\mathscr{F}_n\}\leqslant C_{n+1}\}$.

令 $\sigma_1=\inf\{n\geqslant1,\ E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}=\inf\{n\geqslant1,\ a_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}\leqslant C_{n+1}\}$. 若 $N_n\xrightarrow{a\cdot e}0$ $(n\to\infty)$，因为 $E\{N_n|\mathscr{F}_n\}$是非负上鞅，由上鞅收敛定理知 $E\{N_n|\mathscr{F}_n\}\xrightarrow{a\cdot e}0$，$(n\to\infty)$，从而当 $C_n\geqslant C>0$ 时 $\sigma_1<\infty.\ a\cdot e$ 因此 $P(\bigcup\limits_n A_n)=1$. 另外如果 $\{a_nE\{N_n|\mathscr{F}\}-C_{n+1}\}$ 非增，则 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$. 所以 $\{y_n,\ \mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 属于单调情形，对 σ_1 我们有如下定理。

定理 2 设 $N_n\xrightarrow{a\cdot e}0$，$d<\infty$，且存在 $c>0$ 使得 $C_n\geqslant c$，$\{a_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}-c_{n+1}\}$ 是非增的。则 σ_1是最优停时的充分必要条件是

$Eg(\sigma_1)<\infty.$

证明 必要性，由 σ_1 是最优停时知 $\sigma_1\in\mathscr{T}$.

从而由引理 1 得 $Eg(\sigma_1)<\infty$.

往证充分性。

由上面的讨论知 $\{y_n,\ \mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 属于单调情形，且 $P(\sigma_1<\infty)=1$. 因为 $Eg(\sigma_1)<\infty$ 由引理 1 得 $\sigma_1\in\mathscr{T}$.

显然在 $(\sigma_1>n)$ 上有 $E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\geqslant y_n$且 Ey_{σ_1} 存在：

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{(\sigma_1>n)}y_n^+\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_{(\sigma_1>n)}\beta s_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_{(\sigma_1>n)}\beta N=0$$

由[1]得 σ_1 是可取的。

由引理 1，$\forall\, t\in\mathscr{T}$ 有 $Eg(t)<\infty$ 且 $P(t<\infty)=1$

所以 $\infty > Eg(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{(t=m)} g(m) \geqslant \sum_{m=1}^{n}\int_{(t=m)} g(m) + \int_{(t>n)} g(n)$

两边令 $n\to\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{(n>n)} g(n) = 0$

从而 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_{(t>n)} y_n^- \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_{(t>n)}[g(n) + d_n E\{N_n|\mathscr{F}_n\}]$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_{(t>n)} g(n) + \varlimsup_{n\to\infty}\int_{(t>n)} dN = 0$$

显然在 $(\sigma_1\leqslant n)$ 上有 $E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n$. 由文[1]知 σ_1是半最优的。

因此，$\sigma_1\in\mathscr{T}$. σ_1 可取且半最优，从而：σ_1 是最优停时[1]。

下面我们来讨论具体的模型。

3 Poisson 模型

设打印稿的错误数 N 服从 Poisson 分布 $p(\lambda)$。为了讨论的方便，还假定 $p_n=p$，$d_n=d<\infty$ $n=1,2,\cdots$. $0<p<1$. 文[2]中证明了当 $(x_{n+1}|x_1,\cdots,x_n,N)\sim B(N_n,p)$ 时，有

$$E\{N_n|x_1=a_1,\cdots,x_n=a_n\} = \lambda(1-p)^n$$

此时 $E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=y_n+(\beta+d)p\lambda(1-p)^n-C_{n+1}$

令 $n_0=\inf\{n\geqslant 1,(\beta+d)p\lambda(1-p)^n\leqslant C_{n+1}\}$，不妨设 $n_0<\infty$.

引理 5 设对任意 $k\geqslant n_0$，有 $C_{k+1}\geqslant(d+\beta)\lambda p(1-p)^n$，则当 $k\geqslant n_0$时

$$r_n^k = \begin{cases} y_n & k\geqslant n\geqslant n_0 \\ y_n + \sum\limits_{m=n}^{n_0-1}[(d+\beta)p\lambda(1-p)^m - C_{m+1}] & ,\quad 1\leqslant n< n_0 \end{cases}$$

证明 利用后退归纳法直接验证即得。

定理 3 若 $N\sim p(\lambda)$，$n_0<\infty$ 且当 $n\geqslant n_0$时

$C_{n+1}\geqslant(d+\beta)p\lambda(1-p)^n$ 则

(i) $\sigma^k = \inf\{k\geqslant n\geqslant 1,\ y_n=\gamma_n^k\} = n_0$且 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k = n_0$

(ii) σ 是最优停时。

证明 (i)由引理 5 和 n_0的定义得 $\sigma^k=n_0(k\geqslant n_0)$.

因为 $d_n\equiv d<\infty$，所以 $\gamma_n'=\gamma_n$(引理 2)，则

$\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k = n_0$(引理 4)

(iii) 要证 σ 是最优停时，根据引理 3，只要证明 $E(\sup y_n^+)<\infty$ 且 $p(\sigma<\infty)=1$.

显然 $E\sup y_n^+\leqslant\beta EN<\infty$，$p(\sigma=n_0<\infty)=1$，因此 σ 最优停时。

注：当 $N\sim p(\lambda)$ 时 $g(n)$可以不趋于 $\infty(n\to\infty)$。同样可以得出 σ 是最优停时，这就不同于定理 1，所以 $g(n)\to\infty$ 不是 σ 为最优停时的必要条件，只是充分条件。事实上定理 3 中 $n_0<\infty$ 是完全可以做到的，当 $n\geqslant n_0$ 时，取 $C_{n+1}=\gamma\cdot(d+\beta)p\lambda(1-p)^n(r\geqslant 1)$ 则：σ 是最优停时且 $g(n)\to a<\infty(n\to\infty)$。

4 二项模型

设 $N \sim B(M,\pi)$，其中 M 是打印稿的总字数，π 是每个字出错的概率，称为二项模型，$0<\pi<1$. 文[4]中给出了 $(N_n|x_1,\cdots,x_n) \sim B(M_n,\pi_n)$，其中 $M_n=M-S_n \pi_n = \pi \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)/[(1-\pi)+\pi \prod_{j=1}^{n}(1-p_j)]$，设 $p_j \equiv p$ $d_j \equiv d$ $j=1,2,\cdots$ $o<p<1$.

记 $q=1-p$，$s=1-\pi$，则

$$E\{N_n|\mathscr{F}_n\} = \pi_n M_\pi = \frac{\pi q^n}{s+\pi q^n} M_n$$

所以报酬函数(1)变为

$$y_n = \beta s_n - g(n) - d\frac{\pi q^n}{s+\pi q^n} M_n$$

且 $E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n|=y_n+(p+\beta)d\dfrac{\pi q^n}{s+\pi q^n}M_n - C_{n+1}$

容易验证：$\left\{\dfrac{\pi q^n}{s+\pi q^n}\right\}$ 单调下降趋于 0，$\{M_n\}$ 非增有界。所以

$$(\beta+p)d\frac{\pi q^n}{s+\pi q^m}M_n \xrightarrow{a\cdot e} 0(n\to\infty) \tag{3}$$

且当 $\{C_n\}$ 非降时

$$A_n \triangleq \{E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\} \leqslant y_n\} = \left\{\frac{\pi q^n}{s+\pi q^n}M_n \leqslant C_{n+1}/(\beta+p)d\right\}$$

$$\subseteq \left\{\frac{\pi q^{n+1}}{s+\pi q^{n+1}}M_{n+1} \leqslant C_{n+2}/(\beta+p)d\right\} \triangleq A_{n+1}$$

令 $\quad \sigma_1 = \inf\{n\geqslant 1, E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n| \leqslant y_n\} = \inf\left\{n\geqslant 1, \dfrac{\pi q^n}{s+\pi q^n}M_n \leqslant \dfrac{C_{n+1}}{(\beta+p)d}\right\}$

由 (3) 式知，$\sigma_1<\infty$. $a\cdot e$. 从而 $p\{\bigcup_n A_n\}=1$.

因此，当 $\{C_n\}$ 非降时 $\{y_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 属于单调情形。

由 σ_1 的定义易知，在 $(\sigma_1=n)$ 上

$$C_m \leqslant (\beta+p)d\frac{\pi q^{m-1}}{s+\pi q^{m-1}}M_{m-1} \leqslant \frac{\pi}{s}M(\beta+p)dq^{m-1} \quad m=2,3,\cdots,n$$

因为 $\quad g(n) = C_1 + \sum_{m=2}^{n} C_m \leqslant C_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{s} M(\beta+p)dq^{m-1} \triangleq M_0 < \infty$，所以 $Eg(\sigma_1) \leqslant M_0 < \infty$.

故由定理 2 知 σ_1 是最优停时，于是可得：

定理 4 设 $N\sim B(M,\pi)$，$p_j=p$，$d_j=d$ $\{C_k\}$ 非降，$0<\pi$，$p<1$，则 $\sigma_1=\inf\{n\geqslant 1, E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\} \leqslant y_n\}$ 是最优停时。

（证略）

参 考 文 献

1 金治明. 最优停止理论，国防科技大学（讲义）

2 罗建书. 带费用的校对问题的最优停止. 国防科技大学学报，1993，15（2）

（下接第 86 页）

The π Electron magnetic Susceptibility of C_{76}、C_{78}、C_{82}、C_{84} and C_{90}

Jiang Zongfu　Yang Lijia　Wang Lijun
Jin Chunying　Zhong Hairong　Li Qiang
(Department of Applied Physics)

Abstract

The π electron magnetic susceptibility of D_2-C_{76}、C_{2v}—and D_3-C_{78}、C_2-C_{82}、D_2—and $D_{2d}-C_{84}$、and C_2-C_{90} is calculated with Gauge invariant molecular orbitals method. The calculation results show that these carbon Cluster molecules have large diamagnetic susceptibility. Thus the π electrons of these molecules have large delocal motion and aromatic character.

Key words　Gauge invariant molecular orbitals method、carbor cluster、susceptibility

---

(上接第 121 页)

3　周元桑，H Robbins，D siegmund；何声武，汪振鹏译. 最优停止理论. 上海科学技术出版社，1983
4　Ferguson Ts and Hardwick J P. Stopping rules for profreading. J Appl prob. 1989，26：304～313

Optimal Stopping of proofreading problems with Gain and Costs

Li Bicheng　Luo Jianshu
(Department of System Engineering and Mathematics)

Abstract

In this paper, the optimal stopping of proofreading problems are discussed under assumptions that every proofreading cost may be not same and with certain gain. Then the optimal stopping time are obtained in Poisson model and binomial model.

Key words　Optimal stopping, finite case, monotonousness, semioptimal