国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第1期 1996年3月 Vol. 18 No. 1

双绝热近似下磁流体力学线性稳定性原理*

吴其芬 石于中

（国防科技大学航天技术系 长沙 410073）

摘 要 本文得出了双绝热近似的磁流体力学能量积分关系式。分析表明这种磁流体力学系统是保守的，可以采用运动方程或能量原理方法分析系统的稳定性特性。本文从控制方程组出发讨论了线性稳定性的基本原理，指出纵向压力增值有助于系统的稳定性。

关键词 双绝热近似，磁流体力学，稳定性原理，高温等离子体

分类号 O361.3

The Theory of Magnetohydrodynamic Linear Stability Condition of Biadiabatical Approximation

Wu Qifen Shi Yuzhong

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper has given magneto-hydrodynamic energy integration relationship at the condition of biadiabatical approximaticn. Analysis shows that magnetohydrodynamic system of this kind is conservative. It is feasible to adopt kinetic equations or method of energy principle to analyze the systematic stability. This paper has discussed the basic principle of linear stability proceed from governing equations, and has showed that increment of longitudnal pressure is benifit to systematic stability.

Key words biadiabatical approximation, magnetohydrodynamics, principle of stability, high temperature plasma

通常采用运动方程方法或能量原理方法研究力学系统的稳定性。运动方程方法是对系统反馈一个位移 $\xi(r,t)$，从系统的控制方程导出 ξ 满足的方程，然后依照方程的解判断系统的稳定性及其发展规律。能量原理方法则是依照保守系统的势能极值原理给出稳定

* 国防预研基金资助项目
1995年3月14日收稿

特性的判断。在压力为各向同性假定下，高温等离子体磁流体力学系统是保守的。其线性稳定性原理得到广泛的研究。事实上，高温等离子体的介质压力是各向异性的，与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向有关。在双绝热近似下，它仅表现为垂直磁场方向（横向）和平行磁场方向（纵向）之间的各向异性。在磁场局部坐标系 $t_i=B_i/B$，即 $\boldsymbol{t}(0,0,1)$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ 中，压力张量为

$$P = \mathrm{diag}(p_\perp, p_\perp, p_{/\!/}) \tag{1}$$

这里 B_i、B 分别是磁场分量和强度；$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ 分别是磁场线的单位切向量、法向量和次法向量；下标⊥、//分别记横向和纵向物理量。若记

$$p_\varepsilon = p_{/\!/} - p_\perp \tag{2}$$

则压力张量 P 在任意坐标系中的表达式是

$$P = p_\perp \delta_{ih} + p_\varepsilon t_i t_k \tag{3}$$

式中 δ_{ih} 为 Delta 张量，t_it_k 为并矢张量。用 ν 表示介质的质量密度，则双绝热方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_\perp^2 p_{/\!/}}{\nu^5}\right) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_\perp}{\nu B}\right) = 0 \tag{4}$$

这是与压力各向同性的绝热方程迥然不同的。

1 控制方程

由式(3)及 t_i 的定义立即可得实验室坐标系中压力张量散度表达式

$$\nabla \cdot P = \nabla p_\perp + \nabla \cdot \left(\frac{p_\varepsilon}{B^2}\boldsymbol{BB}\right) \tag{5}$$

于是在完全导体假定下，控制理想流体磁流体力学的方程简化成

$$\nu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p_\perp - \nabla \cdot \left(\frac{p_\varepsilon}{B^2}\boldsymbol{BB}\right) + \frac{1}{\mu}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} + \nu\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为流体质点速度，μ 为磁导率。磁场总是无源场，因此有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9}$$

关联电场、速度场和磁场的欧姆方程在双绝热近似下仍呈以下形式：

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{10}$$

3 能量积分关系式

用 $\boldsymbol{v}$ 标量乘方程(6)并应用方程(7)，则运动方程(6)的左方项可表示成

$$\nu\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\nu v^2\right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\nu v^2\boldsymbol{v}\right) \tag{11}$$

经简单的向量代数运算，方程(6)可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\nu v^2\right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\nu v^2\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{v} \cdot \nabla p_\perp - \boldsymbol{v} \cdot \left[\nabla \cdot \left(\frac{p_\varepsilon}{B^2}\boldsymbol{BB}\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{z\mu}\right)-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \tag{12}$$

式(12)中，$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}$，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 是波印亭能量密度。

在双绝热近似下，式(4)表明介质质点物理量$\dfrac{p^2p_{/\!/}}{\nu^5}$，$\dfrac{p_\perp}{\nu B}$为不变量，于是$\dfrac{B^2P_{/\!/}}{\nu^3}$也为不变量，即有$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{B^2p_{/\!/}}{\nu^3}\right)=0$. 应用这一结果及式(2)，则式(4)可表示成以下等价形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_\perp^3}{\nu^5}\right)+\left(\frac{p_\perp}{\nu B}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{B^2p_\epsilon}{\nu^3}\right)=0 \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{B^2p_\epsilon}{\nu^3}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{B^2p_\perp}{\nu^3}\right)=0 \tag{14}$$

对式(13)第一项微分展开并应用连续方程(7)可将式(12)右方第一项表示成

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla p_\perp=\frac{3}{2}\frac{\partial p_\perp}{\partial t}+\frac{5}{2}\nabla\cdot(p_\perp\boldsymbol{v})+\frac{1}{2}\frac{\nu^3}{B^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{B^2p_\epsilon}{\nu^3}\right) \tag{15}$$

将此一结果代入方程(12)，经向量运算可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\nu v^2+\frac{3}{2}p_\perp+\frac{B^2}{2\mu}+\frac{1}{2}p_\epsilon\right)+\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\nu v^2\boldsymbol{v}+\frac{5}{2}p_\perp\boldsymbol{v}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}p_\epsilon\boldsymbol{v}-\frac{p_\epsilon}{B^2}(\boldsymbol{E}\times\mu\boldsymbol{H})\right]=0 \tag{16}$$

在整个磁流体力学系统所占据的体积 τ 上积分式(16)，应用高斯定理后得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\left(\frac{1}{2}\nu v^2+\frac{3}{2}p_\perp+\frac{B^2}{2\mu}+\frac{1}{2}p_\epsilon\right)\mathrm{d}\tau+\int_s\left[\frac{1}{2}\nu v^2\boldsymbol{v}+\frac{5}{2}p_\perp\boldsymbol{v}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}p_\epsilon\boldsymbol{v}-\frac{p_\epsilon}{B^2}(\boldsymbol{E}\times\mu\boldsymbol{H})\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0 \tag{17}$$

式中面积分域 s 为孤立系统与真空的交界面，$\mathrm{d}\tau$、$\mathrm{d}s$ 为体积元和面积元。在面积分域 s 上，有 $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$. 且由波印亭定理 $\int_s(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}s=0$，对式(17)关于时间 t 积分得

$$U=\int_\tau\left(\frac{1}{2}\nu v^2+\frac{3}{2}p_\perp+\frac{B^2}{2\mu}+\frac{1}{2}p_\epsilon\right)\mathrm{d}\tau=\mathrm{const} \tag{18}$$

这就是双绝热近似磁流体力学能量积分式。

在能量积分式(18)中，总能量 U 由总动能 K 和总势能 W 之和构成。K 与 W 分别为

$$K=\int_\tau\frac{1}{2}\nu v^2\mathrm{d}\tau,\quad W=\int_\tau\left(\frac{3}{2}p_\perp+\frac{1}{2}p_\epsilon+\frac{B^2}{2\mu}\right)\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

$$U=K+W=\mathrm{const} \tag{20}$$

这表明系统的总能量是守恒的。特别地，当压力为各向同性时，式(18)蜕化为绝热指数 $\nu=\dfrac{5}{3}$的能量积分式 $U=\displaystyle\int_\tau\left(\frac{1}{2}\nu v^2+\frac{p}{\nu-1}+\frac{B^2}{2\mu}\right)\mathrm{d}\tau=\mathrm{const}$，这正是所期望的。比较两个积分式得知，在双绝热近似下能量转换中包含有与各向异性相关的因素，它由势能 W 中含有称为非各向同性压力势能项 $W_{p_\epsilon}=\displaystyle\int_\tau\frac{1}{2}p_\epsilon\mathrm{d}\tau$ 表征。当仅当 $p_\epsilon>0$ 时，压力势能 W_{p_ϵ} 才取正值，反之 $p_\epsilon<0$ 时，$W_{p_\epsilon}<0$。

现假定在 $t=0$ 时刻，高温等离子体磁流体力学系统处于平衡状态；达到 Δt 时刻，初

始处于 $\boldsymbol{r}_0$ 位置上的流体元到达位置 $\boldsymbol{r}$，则位移的 $\xi=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$。式(4)表明在拉格朗日描述法下，$p_\perp$、$B$、$p_\epsilon$ 都仅是拉格朗日坐标 ξ 的函数，因此由式(19)有

$$W = W(\xi) \tag{21}$$

按照判定力学系统为保守系统的充要条件，由式(18)、(21)判定双绝热近似下高温等离子体磁流体力学系统确实是保守的。

3 保守力系体密度

按照能量原理通常是由势能的变分 δ_W 判断保守系统的稳定性特性。一般不是对势能表达式(19)进行变分运算得到 δ_W，而是从势能的物理表述：反抗保守力系所作的功等于势能的增加，求得 δ_W。为此必须求出保守力系体密度 $\boldsymbol{F}(\xi)$。

不失一般性，假定系统初始时刻处于静力平衡状态，即 $\boldsymbol{v}|_{t=0}=0$，且处处有

$$\frac{p_\perp^2 p_{/\!/}}{\nu^5} = \text{const}, \quad \frac{p_\perp}{\nu B} = \text{const} \tag{22}$$

于是由式(6)，这时刻物理量还满足

$$\nabla p_\perp + \nabla \cdot \left(\frac{p_\epsilon}{B^2}\boldsymbol{BB}\right) - \frac{1}{\mu}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{23}$$

首先用欧拉描述法推导 $\boldsymbol{F}(\xi)$，然后将得到的结果用拉格朗日变量表示出。假定处于平衡态的系统出现扰动，用上标′记扰动量，则原处于平衡态的物理量 f 经扰动后的值为 $f+f'$。显然扰动后的物理量仍由方程(6)～(8)控制。由式(6)并应用式(22)、(23)可得经过线性化处理后的扰动量满足的方程

$$\begin{aligned}\nu\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}'}{\partial t^2} = G(\boldsymbol{v}') = &-\nabla\left[\frac{p_\perp}{B^2}R_1 - \frac{p_\perp}{\nu}\nabla(\nu\boldsymbol{v}')\right] - 2\boldsymbol{B}[\nabla \times (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B})]\nabla\frac{p_\epsilon}{B^2} + \boldsymbol{BB}\nabla Q_1 \\ &+ Q_1(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \frac{p_\epsilon}{B^2}\{[\nabla \times (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B})\cdot\nabla]\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)[\nabla \times (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B})]\} \\ &+ \frac{1}{\mu}\nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B})] \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times [\nabla \times (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B})]\end{aligned} \tag{24}$$

$$Q_1 = \frac{1}{B^2}\left[\frac{3p_\perp + 4p_\epsilon}{B^2}R_1 + \frac{2p_\perp + 3p_\epsilon}{\nu}\nabla\cdot(\nu\boldsymbol{v}')\right] \tag{25}$$

$$R_1 = \boldsymbol{B}\cdot[(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}'] - \boldsymbol{B}\cdot[(\boldsymbol{v}'\cdot\nabla)\boldsymbol{B}] - B^2\nabla\cdot\boldsymbol{v}'$$

现将以上结果用拉格朗日坐标表出，并为此假定初始位于 $\boldsymbol{r}_0$ 的流体元经过时间 t 后达到位置 $r(t)$，则其位移 $\xi(\boldsymbol{r}_0,t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0$，流体元的速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t)=\frac{\partial\xi}{\partial t}$。假定对初始平衡态的扰动是小量，则速度 $\boldsymbol{v}$ 和位移 ξ 也是小量。于是拉格朗日坐标系中的流体元速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t)$与欧拉坐标系中的速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$之间存在以下近似关系

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t) + (\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t) + \cdots \approx \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t) = \frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{26}$$

式(26)表明，在线性理论下 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$和$\frac{\partial\xi}{\partial t}$无实质性区别，可直接用$\frac{\partial\xi}{\partial t}$代替式(24)中 $\boldsymbol{v}'$。然后对方程从 $t=0$ 到 $t=t$ 积分，且应用初始条件 $\xi(\boldsymbol{r},0)=0$，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},0)=\left.\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|_{t=0}=0$，得

$$\nu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=G(\xi) \tag{27}$$

式(27)的左方$\nu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$显然是保守力系合力的体密度$\boldsymbol{F}(\xi)$，且$G(\xi)$表达式与式(24)$G(\nu')$相同。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi)=&-\nabla\left[\frac{p_\perp}{B^2}R-\frac{p_\perp}{\nu}\nabla\cdot(\nu\xi)\right]-2\boldsymbol{B}[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\cdot\nabla\frac{p_\epsilon}{B^2}\\&+\boldsymbol{BB}\cdot\nabla Q+Q(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\frac{p_\epsilon}{B^2}\{[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla]\boldsymbol{B}\\&+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\}+\frac{1}{\mu}\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\times\boldsymbol{B}\\&+\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\end{aligned} \tag{28}$$

式(28)中，$Q(\xi)=Q_1(\nu')$，$R(\xi)=R_1(\nu')$。由式(28)给出的力密度仅是位移ξ的线性函数而不明显依赖时间，这是保守系统和线性理论的特征。

当介质压力为各向同性时，式(28)蜕化成绝热指数$r=5/3$的经典结果，即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi)=&\nabla(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p+\frac{5}{3}p\cdot\nabla\xi)+\frac{1}{\mu}\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]\\&+\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\end{aligned} \tag{29}$$

4 更一般的力密度表达式

上节得到的力密度表达式(28)是在初始状态满足式(22)下导出的。事实上这条件不总是成立，因此必须从式(4)而不是从式(22)出发推导。在这种情形下，仿照上节步骤，可得到以下保守力系合力的体密度表达式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi)=&-\nabla h-2\boldsymbol{B}[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\nabla\frac{p_\epsilon}{B^2}+\boldsymbol{BB}\cdot\nabla g+g(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\&-\frac{p_\epsilon}{B^2}[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla]\boldsymbol{B}-\frac{p_\epsilon}{B^2}\boldsymbol{B}\cdot\nabla)[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\\&+\frac{1}{\mu}\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B})]\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times(\boldsymbol{B})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\xi)=&\frac{4p_\perp-3p_\perp}{B^4}[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\xi-\boldsymbol{B}\cdot(\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{B}]-p_\epsilon\xi\cdot\nabla\frac{1}{B^2}\\&+\frac{7}{2}\frac{p_\perp}{B^2}\nabla\cdot\xi+\frac{3}{2}p_\perp\nabla\cdot\frac{\xi}{B^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(\xi)=&\frac{p_\perp}{B^2}[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\xi-\boldsymbol{B}\cdot(\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{B}]-p_\perp\nabla\cdot\xi\\&+\frac{1}{2}\frac{p_\perp}{B^2}\xi\cdot\nabla B^2-\nabla\cdot(p_\perp\xi)\end{aligned}$$

5 线性稳定性原理

注意到由以上得到的力密度线性性质，根据上文关于求势能变分δ_W的表述，得

$$\delta_W = -\int_\tau \left\{\int_0^\xi \boldsymbol{F}(\xi)\cdot \mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}\int_\tau \xi\cdot \boldsymbol{F}(\xi)\mathrm{d}\tau \tag{30}$$

且由能量原理得知，系统是稳定的充分必要条件是对于所有的可能扰动 $\xi(\boldsymbol{r}_0,t)$ 恒有 $\delta_W>0$。根据这一原理及式(30)，可对高温等离子磁箍束系统或符合本文边界条件的其它磁流体力学系统进行稳定性特性分析。注意到由式(19)给出的势能表达式中包含有非各向同性项，且当 $p_t>0$，亦即纵向压力增加时，势能值增加。这意味着有更高的势垒反抗位移。换言之，纵向压力的增量有助于系统稳定性，反之为不稳定的驱动源。

分析系统稳定性的运动方程方法则是从位移 $\xi(r_0,t)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\nu}\boldsymbol{F}(\xi) \tag{31}$$

出发，应用分离变量法求解出 $\xi(\boldsymbol{r}_0,t)$ 得到判定的。为此令 $\xi=T(t)\cdot\xi(\boldsymbol{r}_0)$，由式(31)得 $T(t)$、$\xi(\boldsymbol{r}_0)$ 满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_k^2 T,\quad \boldsymbol{F}(\xi_k) - \nu\xi_k\omega_k^2 = 0 \tag{32}$$

式(32)中，常数 $-\omega_k^2$ 称为微分算子 $\frac{1}{\nu}\boldsymbol{F}(\xi)$ 的特征值，它由式(32)的第二式求得，这一式称为算子的特征方程，其解函数称特征函数，通常表示成 $\xi_k=e^{i\omega_k t}$。于是特征方程的通解可表示成

$$\xi(\boldsymbol{r}_0,t) = \sum_k a_k e^{i\omega_k t}\cdot \xi_k(\boldsymbol{r}_0) \tag{33}$$

式(32)、(33)表明，系统稳定的必要条件是微分算子 $\frac{1}{\nu}\boldsymbol{F}(\xi)$ 可能的特征值都是负值。

参 考 文 献

1 Schmiolt G. Physics of High Temperature Plasmas. Second edition. 1979

2 贝特曼著；徐复等译. 磁流体力学不稳定性. 北京：原子能出版社. 1989

3 Chew G F, Goldberger M L & Low F E. The Boltzmann Equation And The Quasi-fluid Hydromegnetic Equation On The Absence Particle Collisions. Pro. Roy. Soc. 1956, 236, Series

（责任编辑　卢天贶）