国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第1期　1996年3月　Vol.18 No.1

应用参数微分法从弹丸试验数据获取阻力系数*

万建伟　周良柱　皇甫堪
(国防科技大学电子技术系　长沙　410073)

摘　要　本文在介绍弹道模型的基础上，讨论了应用参数微分法获取弹丸阻力系数的过程，并给出了计算机仿真实验结果。此方法已应用于靶场。

关键词　参数微分法，阻力系数，数据处理
分类号　TJ011.2

The Application of Parametric Differentiation for Extracting Resistance Coefficients from Firing Test Data

Wan Jianwei　Zhou Liangzhu　Huang Fukan
(Department of Electronic Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　This paper mainly discusses the procedure of applying paramctric differentiation to extract resistance coefficients. The computer simulation results are presented. This method has been actually applied in shooting range.

Key words　parametric differentiation, resistance coefficient, data processing

空气阻力是影响弹丸运动的主要因素之一。在以往的弹道计算中，空气阻力系数的提取采用速度微分法。此方法首先选定弹丸速度 V_r 和阻力系数 C_d 的初始值以及 C_d—Mach 断点值，计算出弹道，然后利用原始射击数据，对刚计算出的弹道进行修正，得到新拟合出的 C_d—Mach 曲线，并用新断点值代替原断点值。如果前后差值较大，则循环进行此两步，直到差值小到一定程度，迭代结束。此时，弹道计算结果即达到要求。这种方法的缺点是：由于在计算的开始阶段，要假定一些初值，要设定一些断点，所以给弹道的计算加入了一定的人为因素。如果所选的初值与真值的偏差很大，并且断点取得不合适，那么迭代次数就会增多，拟合收敛就会很缓慢，最终可能导致拟合发散。即使各初值取的合适，新老断点的差值仍需人工逐个判断，从而使得处理速度降低。

---

* 国防科工委科技进步一等奖项目
1995年5月5日收稿

本文采用的弹道计算方法是参数微分法(又称CK 算法)。该方法是将阻力系数、初速作为弹道微分方程中的待估参数，从雷达径向速度差平方最小的判据出发，将收敛条件写成各待估参数修正量的 n 元一次方程组(n 为待估参数的个数)。通过求解这个方程组，获得各待估参数的修正量；通过逐步迭代计算，修正各待估参数，使弹道微分方程所计算出的雷达径向速度逐步逼近测量的径向速度。由于该算法直接采用径向速度进行逼近，省去了原算法中径向换切向等引起的一系列的数据处理过程。另外，利用该算法编制出的软件能够对测速数据进行自动快速处理，无需用户选择 C_d—Mach 曲线的初始断点值。这简化了用户的操作，提高了数据处理的速度，解决了原软件处理结果受人为断点选择的影响问题。

1 弹道模型

出膛后的炮弹在空中飞行，受到空气阻力、重力及飞行速度等诸因素的影响。它们一起决定了弹道。通过推导[1]，可以得到以炮口为原点的直角坐标系下的弹丸质心运动方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}S\rho C_d(M)V_r(V_x - W_x) \\ \dfrac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}S\rho C_d(M)V_rV_y - g \\ \dfrac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}S\rho C_d(M)V_r(V_z - W_z) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_y,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_z \end{cases} \tag{1}$$

其中 V_r 为弹丸在弹道上的空速；V_x、V_y、V_z 为 x、y、z 方向上弹丸相对于地面的速度；x、y、z：分别为 水平距离、弹道高度及横向距离；W_x、W_z 为纵、横向风速度；$V_r=\sqrt{(V_x-W_x)^2+V_y^2+(V_z-W_z)^2}$。$M$ 为马赫数，$M=V_r/S_t$；$C_d(M)$为阻力系数，与马赫数有关；S_t 为当地音速；$S_t=\sqrt{kgR\tau}$；k 为绝热指数，$k=1.404$；R 为气体常数，$R=29.27$；g 为重力加速度，$g=9.80\mathrm{m/s^2}$；ρ 为空气密度，$\rho=\dfrac{13.6h}{gR\tau}$；$h$ 为气压。

在标准气象条件下$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{hV_y}{R\tau}$，$\tau$ 为虚温

$$\tau = \begin{cases} 228.9 - 6.328\times10^{-3}y & y\leqslant 9300 \\ 230 - 6.328\times10^{-3}(y-9300) + 1.172\times10^{-6}(y-9300)^2, & 9300 < y \leqslant 12000 \\ 221.5 & y > 12000 \end{cases}$$

其中 y 为实际弹丸高度，单位为 m；S 为弹丸面质比，$S=\dfrac{\pi d^2}{4m}$；m 为弹丸质量；d 为弹径。

2 弹道计算方法

弹道计算的任务就是解方程组(1)，算出 x、y、z、V_x、V_y、V_z 等参数。从式(1)可以看出，各方程之间都是相互关联的，且系数 ρ 中含有因变量 y，不能分离出来。因此方程不能用直接积分的方法求解，而须用数值方法近似求解。阻力系数 $C_d(M)$取决于风速、弹丸的速度及形状等因素。目前，还没有一个准确的数学公式来表示它。因此，要解弹道方程先要确定阻力系数 $C_d(M)$的数值。因而，方程(1)有如下两个用处：(1) 根据测量

的原始数据，计算阻力系数 $C_d(M)$；(2) 阻力系数确定之后，计算弹道。

以上的两个内容就构成了 C_d 程序的两个主要功能：C_d 处理和弹道计算。下面根据上述任务，应用 CK 算法来求取阻力系数。

1 CK 算法

根据试验数据求取阻力系数的方法有直接法、微分修正法和参数微分法等。前两种方法由于各自的缺点，特别是精度差，使应用受到了限制。参数微分法 (CK 算法) 基于最小二乘法原理。它具有假设条件少，对试验数据精度要求低，计算精度高的优点。下面我们阐述它的原理。

设在靶场 n 个观察点测得 m 个物理量的一组数据如下：

$$\begin{cases} t_1、t_2,\cdots,t_n \\ y_{11}、y_{21},\cdots,y_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{1m}、y_{2m},\cdots,y_{nm} \end{cases} \tag{2}$$

要拟合的参数有 l 个：C_1、$C_2,\cdots,C_l$. 迭代公式为

$$C_k(1) = C_k(0) + \Delta C_k. \quad k = 1,2,\cdots,l \tag{3}$$

其中“0”表示上次的计算值，“1”为下次计算的迭代值，ΔC_k 是对参数 C_k 的修正量。它的求取可通过下列推导获得。

根据最小二乘原理，希望计算估值 y_c 与测量值 y_e 偏差的平方最小，即

$$\mathrm{SSR} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[y_{eij} - y_{cij}]^2$$

最小。若加上拟合参数 C_k 所带来的修正，SSR 为

$$\mathrm{SSR} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[y_{eij} - y_{cij} - \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_k}\right)_{ij}\Delta C_k\right]^2 \tag{4}$$

要求 SSR 最小，必须满足：

$$\frac{\partial(\mathrm{SSR})}{\partial C_s} = 0, \quad s = 1,2,\cdots,l \tag{5}$$

由于 y_e、ΔC_k 为常数，拟合参数在观测模型中最高次数为 1，所以有

$$\frac{\partial y_e}{\partial C_k} = \frac{\partial \Delta C_k}{\partial C_k} = \frac{\partial^2 y_c}{\partial^2 C_k} = 0$$

这样由式(4)和(5)可以得到

$$-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[(y_{eij} - y_{cij}) - \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_k}\right)_{ij}\Delta C_k\right]\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_s}\right)_{ij} = 0$$

即：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_k}\right)_{ij}\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_s}\right)_{ij}\Delta C_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{eij} - y_{cij})\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_s}\right)_{ij}.$$

将上式写成矩阵形式有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\Delta C} = \boldsymbol{B} \tag{6}$$

其中 $\begin{cases}\boldsymbol{A} = [a_{sk}]_{e\times l} \\ \boldsymbol{B} = [b_1\ b_2\cdots b_l]^T\end{cases}$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Delta C} = [\Delta C_1 \ \Delta C_2 \cdots \Delta C_l]^T \\
a_{sk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_s}\right)_{ij}\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_k}\right)_{ij} \quad s,k = 1,2,\cdots,l \\
b_s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{eij} - y_{cij})\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_s}\right)_{ij}
\end{cases}
\tag{7}
$$

给定一组参数 $C_k(0)$，由相应的弹丸运动微分方程组对 C_k 进行形式微分，将得到的参数微分方程组与原方程组联立求解，可解出 y_{cij}，$\left(\frac{\partial y_c}{\partial C_k}\right)_{ij}$，代入方程组(7)求出 ΔC_k，再代入式(4)便可得到下次迭代时的 $C_k(1)$。如此反复，直至 $|\Delta C_k|$ 小于预选给定的精度。

2 CK 算法应用

在弹道分析仪中，试验数据为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，$V_{k_1}, V_{k_2}, \cdots, V_{k_n}$。其中 V_k 为弹丸相对于天线的径向速度，t 为对应的时刻。

在此，将阻力系数 C_d、初速 V_0，火箭加速度 a_p 作为弹道微分方程中的待估参数（拟合参数）。由于整条弹道各处的 C_d 不是常值，因此，若将 C_d 作为一条直线拟合，则拟合就难以达到收敛。同时，弹道的计算也是很不准确的。为此，本文采用了测量数据重迭分段法。将一定点数的测量数据作为一段，每段内以一个阻力系数或火箭加速度作为待估参数（第一段中初速也作为待估参数）；然后数据段逐渐向后移，各段之间有适当的重迭量。这样既保证了各段待估参数的精度，又保证了整条弹道的客观性。

在(7)式中取 $m=1$，$l=2$，可得：

$$
\boldsymbol{\Delta C} = [\Delta C_d \quad \Delta V_0]^T
$$

$$
\boldsymbol{B} = \left[\sum_{i=1}^{n}(V_{Rei} - V_{Rci})\left(\frac{\partial V_R}{\partial C_d}\right)_i \quad \sum_{i=1}^{n}(V_{Rei} - V_{Rci})\left(\frac{\partial V_R}{\partial_{V_0}}\right)_i\right]^T
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_R}{\partial C_d}\right)_i^2 & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_R}{\partial C_d}\right)_i\left(\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right)_i \\
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_R}{\partial C_d}\right)_i\left(\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right)_i & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right)_i^2
\end{bmatrix}
$$

写成方程组的形式，则为

$$
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\Delta C} = \boldsymbol{B} \tag{8}
$$

称上式为弹道中各段的修正方程。式中，V_{Rei} 为径向速度的实测值；V_{Rci} 为径向速度的计算值；ΔC_d 为阻力系数 C_d 的修正量，火箭主动段时是火箭加速度 a_p 的修正量 Δa_p；ΔV_0 为初速的修正量。$\frac{\partial V_R}{\partial C_d}$，$\frac{\partial V_R}{\partial V_0}$ 为径向速度对 C_d 和 V_0 的偏导数。如果不处理初速，则 $\Delta V_0 = 0$，$\frac{\partial V_R}{\partial V_0} = 0$.

假设天线到弹丸的径向距离为 R，天线的坐标为$(x_0、y_0、z_0)$，则有

$$
R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2
$$

将上式两边对 t 求导，整理可得

$$
V_R = \frac{1}{R}[(x - x_0)V_x + (y - y_0)V_y + (z - z_0)V_z] \tag{9}
$$

再将(9)式对 C_d 求导，则可得参数微分方程：

$$\frac{\partial V_R}{\partial C_d}=\frac{1}{R}\left[(x-x_0)\frac{\partial V_x}{\partial C_d}+(y-y_0)\frac{\partial V_y}{\partial C_d}+(z-z_0)\frac{\partial V_z}{\partial C_d}\right] \tag{10}$$

由式(1)对 C_d 进行形式微分，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial C_d}\right)=-\dfrac{1}{2}S\rho V_r(V_x-W_x)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial C_d}\right)=-\dfrac{1}{2}S\rho V_r V_y\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial C_d}\right)=-\dfrac{1}{2}S\rho V_r(V_z-W_z)\end{cases} \tag{11}$$

而 V_0 的参数微分方程可通过下式求得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\partial V_x}{\partial V_0}\right]=\cos\alpha\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\partial V_y}{\partial V_0}\right]=\sin\alpha\end{cases} \tag{12}$$

这是因为 $V_x=V\cos\alpha$，$V_y=V\sin\alpha$，$\alpha=\mathrm{arc\ tg}\left(\dfrac{V_y}{V_x}\right)$ 为普通弹的弹道倾角。

$$\frac{\partial V_R}{\partial V_0}=\frac{1}{R}\left[(x-x_0)\frac{\partial V_x}{\partial V_0}+(y-y_0)\frac{\partial V_y}{\partial V_0}\right] \tag{13}$$

式(11)和(12)均可通过数值解法解得。用数值解法对式(1)进行求解，还可得到 V_{Rci} 及各点的坐标(x,y,z)，然后就可对待估参数进行修正、拟合。在迭代运算的开始（第一段），必须首先给各待估参数一个初值，通过修正方程(8)计算出修正量 ΔC_d 和 ΔV_0，然后取

$$\begin{cases}C_d(1)=C_d(0)+\Delta C_d\\ V_0(1)=V_0(0)+\Delta V_0\end{cases} \tag{14}$$

用新的估值重新执行上述过程，直至达到所要求的收敛条件。在本段拟合结束后，其 C_d 值作为下一段的待估参数 C_d 的初值，对下一段再进行拟合计算。如此下去，直至整条弹道各段的 C_d 拟合结束。这样，整个弹道的阻力系数 C_d 就确定下来，完成了 C_d 程序的第一项任务。以后工作是解弹道方程(1)的问题。

3　计算机仿真

3.1　方案

为了检验 CK 算法的正确性，对它进行了仿真实验。用 CK 算法计算得到的弹道，与理论弹道相比较，以观测其误差到底有多少。但是理论曲线的获得是不容易的，因为从弹道模型(1)可以看出，各方程间均相互关联的，阻力系数 C_d 也未知的，而且到目前为止，从理论上还无法得到 C_d 的精确计算公式。所以假设在标准气象条件下，炮弹的初速 $V_0=887.105$(m/s)，阻力系数 C_d 为 0.3，再设定好其它参数，通过编程，以常值 C_d 的形式计算弹道，可得到一条完整的弹道曲线。本文便以此弹道作为理论弹道。虽然这样的假定不够完善，但却能说明问题。

在具体仿真过程中，根据 C_d 程序对实测数据的要求，首先应用公式把理论弹道上各点的切向速度转换为径向速度，作为一组实测的原始数据对 C_d 进行处理，并计算弹道。

然后，比较拟合后各段的 C_d 值与理论值 0.3，拟合计算出的速度与理论速度，得出误差。在此，采用相对误差：

$$相对误差 = \frac{|计算值 - 理论值|}{理论值}$$

为了说明问题，采用两种情况仿真。一种是无噪声情况下的仿真；另一种则是在有噪声情况下的仿真。在有噪声时

$$V_{Rei} = V_{Ri} + \varepsilon_i$$

其中 ε_i 为零均值的白噪声。为了确定 ε_i 的取值范围，定义如下的信噪比：

$$\mathrm{SNR} = 10\lg \frac{\sigma\nu^2}{\sigma\varepsilon^2} \tag{15}$$

则：

$$\sigma\varepsilon^2 = \sigma\nu^2/10^{\mathrm{SNR}/10} \tag{16}$$

式中

$$\sigma\nu^2 = E[(V_R - \overline{V}_R)^2] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(V_{Ri} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}V_{Ri}\right)^2.$$

若确定了信噪比 SNR，则容易由式（16）求出噪声的方差 $\sigma\varepsilon^2$. 若取噪声为均匀分布，则容易得到其最大幅值为

$$\chi^2_{\max} = 3\sigma\varepsilon^2 \tag{17}$$

3.2 结果

根据上述方案，作者在计算机上对每一种情况进行了多次的模拟仿真，得到了各种统计结果，如表 1 所示。

表 1 仿真数据与理论数据之比较

项目	无噪声时的平均误差(1/100)	加噪声时的平均误差(1/100)		
		SNR＝40dB	SNR＝30dB	SNR＝20dB
C_d	0	0.1167	0.3667	0.6667
V_r	0	0.0564	0.1691	0.4509

仿真结果表明，在无噪声情况下，CK 与 V_r 的计算值与理论值的误差为零。这也证明了用 CK 算法编制的弹道计算软件具有实用价值，可以投入到实际靶场中使用。在有噪声情况下，当信噪比较高时，误差较小，当信噪比减小到 20dB 时，误差相对增加比较大，无法得到较为正确的计算结果。

4 结 论

本文讨论了利用参数微分法，求取弹丸阻力系数的过程，提出了将测量数据重迭分段，运用最小二乘原理，分段求取待估参数的方法。该方法已在国内靶场使用。采用此方法，弹道计算时间已由原来需时 30min 以上缩短为 5min 左右，因而大大提高了数据处理速度。

参 考 文 献

1 浦发．外弹道学，北京：国防工业出版社，1980

2 薛晓中．由弹丸试验数据获取完整的气动系数的方法及其比较．兵工学报，1990，(3)

3 关治．数值计算方法．北京：清华大学出版社，1990

4 Chapman G T, Kirk D B. A New Method for Extracting Aerodynamic Coefficients From Free. Flight Data. NASA. 1970

（责任编辑 潘 生）