国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第1期 1996年3月 Vol. 18 No. 1

连续情形的窃贼问题*

李弼程 罗建书 金治明

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 讨论了连续时间上的窃贼问题。J_t 是 $[0,t]$ 上窃贼作案的次数，$\{J_t\}_{t\geq 0}$是 Poisson 过程；收获过程与风险过程都是独立同分布的时间序列。利用弱无穷小算子，我们找出了最优停时规则。

关键词 最优停时规则，马氏过程，弱无穷小算子，窃贼问题

分类号 O211

A Continuous-time Theft Problem

Li Bicheng Luo Jianshu Jing Zhiming

(Department of System Engineering and Mathematics NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we discuss the theft problem in continuous time. J_t is the theft number of $[0, t]$ and $\{J_t\}_{t\geq 0}$ is a Poisson process. Profit process and risk process are all i. i. d time series. We find optimal stopping rules by using the weak infinitesimal generator of markov process.

Key words optimal stopping rule, morkov process, weak infinitesimal generator, theft problem

在经典的离散情形的窃贼[1]问题中，记 u_n 表示窃贼第 n 次作案的收获，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$是独立同分布的时间序列；$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$是风险过程，独立同分布，$\delta_n=1$ 表示第 n 次作案时未被抓住，否则 $\delta_n=0$；设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$独立，$p=P(\delta_n=1)=1-P(\delta_n=0)=1-q,\mu=Eu_1<\infty$，如果一旦作案时被抓住，他将交出全部赃物，这样窃贼作案 n 次的总收获为

$$s_n=\delta_1\cdots\delta_n\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right),\quad n=1,2,\cdots$$

报酬序列为 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$，其最优停时为

* 国家自然科学基金资助项目
1995年9月18日收稿

$$s=\inf\{n\geqslant 1,\delta_1\cdots\delta_n(\sum_{i=1}^{n}u_i(p-1)+\mu p)\leqslant 0\}$$

就是说，对窃贼来说，要么在被抓住时洗手不干，或者在所偷窃赃物累计超过了$\frac{p}{1-p}\mu$时洗手不干是最明智的策略。

如果修改报酬函数为 $S_n=\prod_{i=1}^{n}\delta_i\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)-C_n$，其中 $C_n\uparrow$，且 $C_{n+1}-C_n$ 也单调上升，这表明每次行窃要付出一定的代价，则可证明最优规则是

$$s=\inf\{n\geqslant 1,\left(\prod_{i=1}^{n}\delta_i\right)\left[\sum_{i=1}^{n}u_i(p-1)+\mu p\right]-C_{n+1}+C_n\leqslant 0\}$$

如果修改报酬函数为 $s_n=\left(\prod_{i=1}^{n}\delta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)-\left(1-\prod_{i=1}^{n}\delta_i\right)C_n$，表明如果一旦被抓获，窃贼不仅要交出全部赃物，还要处以罚金，此时最优规则为

$$s=\inf\{n\geqslant 1,\left(\prod_{i=1}^{n}\delta_i\right)\left[\sum_{i=1}^{n}u_i(p-1)+\mu p\right]+\left(\prod_{i=1}^{n}\delta_i\right)(pC_{n+1}-C_n)\leqslant C_{n+1}-C_n\}$$

在本文中，我们研究了连续时间上的窃贼问题，得到与离散情形类似的结果。

1 模型的建立

记 J_t 是 $[0,t]$ 上的窃贼作案的次数，$\{J_t\}_{t\geqslant 0}$是参数为 λ 的 Poisson 过程[2]，即它具有独立增量，而且$\forall\ t>s>0$，$P\ (J_t-J_s=k)\ =\frac{e^{-\lambda(t-s)}\lambda^k\ (t-s)^k}{k\,!}$，$(\lambda>0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。因 Poisson 过程 $\{J_t\}_{t\geqslant 0}$是完全可分的，且有右连续修正，故下设 $\{J_t\}_{t\geqslant 0}$是右连续的。$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$定义如引言，假定 $\{J_t\}_{t\geqslant 0}$，$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$相互独立，且$\forall\ n$，$u_n>0$，$P.\ a.s.$。如果一旦窃贼在作案时被抓住，他将交出全部赃物，则在 $[0,t]$ 上的收益为

$$X_t=\delta_1\cdots\delta_2\cdots\delta_{J_t}\left(\sum_{i=1}^{J_t}u_i\right)\tag{1}$$

考虑到窃贼在 $[0,t]$ 期间要付出一定的代价和费用，则窃贼在 $[0,t]$ 上的收益为

$$Y_t=X_t-c\cdot t\tag{2}$$

其中 $c\geqslant 0$ 表示单位时间的费用为 c。如果一旦被抓住，窃贼不但要交出全部赃物，而且还要处以罚金，则报酬函数修改为

$$Y_t=X_t-\left(1-\prod_{i=1}^{J_t}\delta_i\right)CiJ_t\tag{3}$$

其中 $c_1>0$，表示每次作案的罚金为 c_1，我们还讨论带折扣因子的报酬函数：

$$Y_t=e^{-\alpha t}X_t-\int_0^t ce^{-\alpha s}ds\tag{4}$$

其中 $\alpha>0$，称为折扣因子。

我们考虑过程 $\{(t,\ J_t,\ X_t)\}_{t\geqslant 0}$，它取值于 $Q\triangleq[0,\infty)\times\{0,1,2,\cdots,\}\times[0,\infty)$，其状态空间为 $(Q,\mathscr{B})$。令 $\mathscr{F}_t=\sigma\ (\ (J_s,\ X_s),\ s\leqslant t)$。

引理 2.1

$$E\{I_{(J_t-J_s=K)(J_s=j)}\left(\prod_{i=1}^{K}\delta_{j+i}\right)|\mathscr{F}_s\}$$

$$=p^k\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}I_{J_s=j)} \qquad (j\geqslant 0,K\geqslant 1) \qquad (5)$$

证略。

令 $\sigma_1\triangleq\inf\{t\geqslant 0,J_t=1\}$，$\sigma_1$ 表示第一次作案的时刻。可以证明：

$$(I_{(J_s\geqslant 1)}\delta_1\cdot\cdots\cdot\delta_{J_s}=0)=(I_{(J_s\geqslant 1)}X_s=0) \qquad (6)$$

引理 2.2 $\{(t,J_t,X_t)\}_{t\geqslant 0}$是右连续的马氏过程。

证明 由$\{J_t\}_{t\geqslant 0}$的右连续性可知$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$是右连续的，从而$\{(t,J_t,X_t)\}_{t\geqslant 0}$是右连续的。另外，$\forall\ t>s\geqslant 0$，

$$E\{J_t|\mathscr{F}_s\}=E\{J_t-J_s|\mathscr{F}_s\}+J_s=E\{J_t-J_s|\sigma((J_s,X_s))\}+J_s$$
$$=E\{J_t|\sigma((J_s,X_s))\}$$
$$E\{X_t|\mathscr{F}_s\}=E\{X_tI_{(\sigma_1\leqslant s)}|\mathscr{F}_s\}+E\{X_tI_{(s<\sigma_1\leqslant t)}|\mathscr{F}_s\}+E\{X_tI_{(\sigma_1>t)}|\mathscr{F}_s\}$$
$$=E(X_tI_{(J_s\geqslant 1)}|\mathscr{F}_s\}+E\{X_tI_{(J_s=0,J_t\geqslant 1)}|\mathscr{F}_s\}$$

可证

$$E\{X_tI_{(J_s\geqslant 1)}|\mathscr{F}_s\}=E\{I_{(J_s\geqslant 1)}X_t|\sigma((J_s,X_s))\}$$

又由(5)、(6)式可得：

$$E\{X_tI_{(J_s=0,J_t\geqslant 1)}|\mathscr{F}_s\}=E\{X_tI_{(J_s=0,J_t\geqslant 1)}|\sigma((J_s,X_s))\}$$

故有

$$E\{X_t|\mathscr{F}_s\}=E\{X_t|\sigma((J_s,X_s))\}$$

2 弱无穷小算子 $\widetilde{A}$[3][4]

本节考虑马氏过程$\{(t,J_t,X_t)\}_{t\geqslant 0}$的弱无穷小算子 $\widetilde{A}$。记 $B\triangleq\{f;f(t,i,x):Q\to R$ 有界 $\mathscr{B}$—可测函数$\}$。$\widetilde{B}_0\triangleq\{f\in B;\forall\ (i,x)\in\{0,1,2,\cdots\}\times[0,\infty),\lim\limits_{t\downarrow 0}E\{f(t,J_t,X_t)|(J_0,X_0)=(i,x)\}=f(0,i,x)\}$，$\mathscr{D}_{\widetilde{A}}\triangleq\{f\in\widetilde{B}_0;\forall\ (t,i,x)\in Q,\exists\ g(t,i,x)\triangleq\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\dfrac{E\{f(t+\varepsilon,J_{t+\varepsilon},X_{t+\varepsilon})|(J_t,X_t)=(i,x)\}-f(t,i,x)}{\varepsilon}$ 有 $g\in\widetilde{B}_0\}$，记 $\widetilde{A}f(t,i,x)=g(t,i,x)$，$\widetilde{A}$ 为马氏过程$\{(t,J_t,X_t)\}_{t\geqslant 0}$的弱无穷小算子，$\mathscr{D}_{\widetilde{A}}$为 $\widetilde{A}$ 的定义域。

下面我们来求 $\widetilde{A}f(t,i,x)$，设$\forall\ i=0,1,2,\cdots,(t,x)\to f(t,i,x)$连续，$f$ 有界。

设 $x\neq 0,\varepsilon\to 0,i>0$，

$$E\{f(t+\varepsilon,J_{t+\varepsilon},x_{t+\varepsilon})|(J_t,X_t)=(i,x)\}$$
$$=E\{I_{(J_{t+\varepsilon}=i+1)}f(t+\varepsilon,i+1,\delta_{i+1}(x+u_{i+1}))|(J_t,X_t)=(i,x)\}$$
$$+E\{I_{(J_t+\varepsilon=i)}f(t+\varepsilon,i,x)|(J_t,X_t)=(i,x)\}+0(\varepsilon)$$
$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+0(\varepsilon)$$

显然

$$\mathrm{II}=f(t+\varepsilon,i,x)[1-\lambda\varepsilon]+0(\varepsilon)$$
$$\mathrm{I}=E\{f(t+\varepsilon,i+1,\delta_{i+1}(x+u_{i+1})I_{(J_{t+\varepsilon}-J_t=1)}|(J_t,X_t)=(i,x)\}$$

$$= E\{f(t+\varepsilon, i+1, \delta_{i+1}(x+u_{i+1}))\} \cdot E\{I_{(J_{t+\varepsilon}-J_t=1)}\}$$

$$= \{pEf(t+\varepsilon, i+1, x+u_1) + qf(t+\varepsilon, i+1, 0)]\lambda\varepsilon + 0(\varepsilon)$$

所以

$$\widetilde{A}f(t,i,x) = \lambda[PEf(t,i+1,x+u_1) + qf(t,i+1,0)] - \lambda f(t,i,x) + \frac{\partial}{\partial t}f(t,i,x) \quad (i \geqslant 1)(x \neq 0) \tag{7}$$

同样可求：

$$\widetilde{A}f(t,i,0) = \lambda f(t,i+1,0) + \frac{\partial}{\partial t}f(t,i,0) - \lambda f(t,i,0) \quad (i \geqslant 1) \tag{8}$$

$$\widetilde{A}f(t,0,0) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,0,0) - \lambda f(t,0,0) + \lambda[pEf(t,1,u_1) + qf(t,1,0)] \tag{9}$$

由(7)、(8)、(9)式可知，若 $f(t,i,x)$满足下面三项：

a) $\forall\ i \geqslant 0, f(t,i,x)$对$(t,x)$连续；b) f 有界；c) $\frac{\partial}{\partial t}f(t,i,x)$存在，且对$\frac{\partial}{\partial t}f(t,i,x)$，a) b)成立。则 $f \in D_{\widetilde{A}}$。

4 最优停时规则

记 J 是$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$停时规则的全体；$\sigma_0 \triangleq \inf\{t \geqslant \sigma_1, x_t = 0\}$，$\sigma_0$ 表示首次被抓住的时刻，且$(\sigma_0 > t) = (\sigma_1 > t) \cup (J_t \geqslant 1, x_t > 0) = (J_t = 0) \cup (J_t \geqslant 1, X_t > 0)$。因为$(J_0, X_0) = (0,0) P.a.s.$ 所以，我们用 E,P 分别代替 $E_{(0,0,0)}, P_{(0,0,0)}$。

引理 4.1 $E\sigma_1 = \frac{1}{\lambda} \qquad E\sigma_0 = \frac{1}{\lambda(1-p)}$

证明 $E\sigma_1 = \int_0^\infty p(\sigma_1 > t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty p(J_t = 0)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} < \infty$。类似可证。

引理 4.2 若$\exists\ \delta > 0$，有 $Eu_1^{1+\delta} < \infty$，则 $E\sup\limits_s X_s < \infty$。

证明 由 Hölder 不等式，有

$$\sum_{i=1}^n u_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n u_i^{1+\delta}\Big)^{\frac{1}{1+\delta}} \cdot n^{\frac{\delta}{1+\delta}}$$

从而

$$\Big(\sum_{i=1}^n u_i\Big)^{1+\delta} \leqslant n^\delta \sum_{i=1}^n u_i^{1+\delta}, \quad E\Big(\sum_{i=1}^n u_i\Big)^{1+\delta} \leqslant n^{1+\delta}Eu_1^{1+\delta}$$

由此可证

$$E\sup_s X_s = \int_0^\infty p(\sup_s X_s > y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=1}^\infty p^k k^{1+\delta}\Big)Eu_1^{1+\delta}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{y^{1+\delta}}\mathrm{d}y + \varepsilon < \infty \quad (\varepsilon > 0)$$

令 $\mathscr{J}_0 = \{\tau \in \mathscr{J}, \tau \leqslant \sigma_0, p_{a.s}\}$，由引理 4.1 知，$\forall\ \tau \in \mathscr{J}_0, E\tau < \infty$。下面我们假定$\exists\ \delta > 0, Eu_1^{1+\delta} < \infty$，且 $p < 1$。

定理 1 对于报酬函数 $Y_t = X_t$

令 $\tau_1 \triangleq \inf\{t \geqslant 0,\ X_t \geqslant \frac{p}{1-p} - \mu\} \wedge \sigma_0$，则 τ_1 是最优停时规则。

证明 令 $f_N(t,i,x)=x\wedge N$，$(N>0)$ 则 $f_M\in D_{\widetilde{A}}$，
$\forall\ \sigma\in\mathscr{J}_0$，$\sigma_k=\sigma\wedge k,(k>1)$ 由 Dynkin 公式得：

$$
\begin{aligned}
Ef_N(\sigma_k,J_{\sigma_k},X_{\sigma_k}) &= E\int_0^{\sigma_k}\widetilde{A}f_N(t,J_t,X_t)dt+O(1)\\
&= E\int_0^{\sigma_1}\widetilde{A}f_N(t,J_t,X_t)dt+E\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\widetilde{A}f_N(t,J_t,X_t)dt\\
&= E\int_0^{\sigma_1}\lambda pE[u_1\wedge N]ds+E[I_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda pE[(x+u_1)\wedge N]_{|x=x_s}ds]\\
&\quad -E[I_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda p[X_s\wedge N]ds]+E[I_{(\sigma_k>\sigma_1)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda pE[u_1\wedge N]ds]
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$，由单调收敛定理得：

$$
EX_{\sigma_k}=E\int_0^{\sigma_0}\lambda p\mu ds+EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}[\lambda pu-\lambda qX_s]ds+EI_{(\sigma_1>\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda p\mu ds \tag{10}
$$

对固定的 $w\in\Omega$，当 $s\in[\sigma_1,\sigma_0)$ 时 $(p\mu-qX_s)$ 单调非增，由 τ_1 的定义知 $p(\tau_1\geqslant\sigma_1)=1$，且

$$
\begin{aligned}
&EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu-qX_s]ds\\
&=EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\tau_1}\lambda[p\mu-qX_s]ds+EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\tau_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu-qX_s]ds\\
&\leqslant E\int_{\sigma_1}^{\tau_1}\lambda[p\mu-qX_s]ds+EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)(\tau_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\tau_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu-qX_s]ds\\
&\quad +EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)(\tau_1>\sigma_k)}\int_{\tau_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu-qX_s]ds
\end{aligned}
$$

上式的后两项非正，故

$$
EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu-qX_s]ds\leqslant E\int_{\sigma_1}^{\tau_1}\lambda[p\mu-qX_s]ds \tag{11}
$$

由(10)、(11)两式知：

$$
EX_{\sigma_k}\leqslant E\int_0^{\sigma_1}\lambda p\mu ds+E\int_{\sigma_1}^{\tau_1}\lambda[p\mu-qX_s]ds \tag{12}
$$

在(10)式中，令 $\sigma_k=\tau_1\wedge k$，再令 $k\to\infty$，可得：

$$
EX_{\tau_1}=E\int_0^{\sigma_1}\lambda p\mu ds+E\int_{\sigma_1}^{\tau_1}\lambda[p\mu-qX_s]ds
$$

故：$EX_{\sigma_k}\leqslant EX_{\tau_1}$，从而 $EX_\sigma\leqslant EX_{\tau_1}$，$\sup\limits_{\sigma\in\mathscr{J}_0}EX_\sigma=EX_{\tau_1}$。

可以证明 $\sup\limits_{\tau\in\mathscr{J}_0}EX_\tau=\sup\limits_{\tau\in\mathscr{J}}EX_\tau$

所以 $\sup\limits_{\tau\in\mathscr{J}}EX_\tau=EX_{\tau_1}$

由定理 1 知，对窃贼来说，要么在首次被抓住时洗手不干，或者在所偷赃物超过了 $\frac{p}{1-p}\cdot\mu$ 时洗手不干是最明智的。有趣的是，这个结果与离散情形完全一致。

定理 2 对于报酬函数 $Y_t=X_t-ct$。

a) 若 $c\geqslant\lambda p\mu$，则 $\sigma=0$，$P.a.s$ 是最优的，即不要作案。

b)　若 $c<\lambda p\mu$，则 $\tau_2 \triangleq \inf\ \{t\geqslant 0,\ x_t\geqslant \frac{p}{1-p}\cdot\mu-\frac{c}{\lambda\ (1-p)}\}\ \lambda\sigma_0$ 是最优停时规则。

证明　由（10）式知，$\forall\ \sigma\in\mathscr{J}_0$，$\sigma_k=\sigma\wedge k$，$(k>1)$ 有

$$E[X_{\sigma_k}-c\sigma_k]=E\int_0^{\sigma_1}[\lambda p\mu-c]ds+EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}[\lambda p\mu-q\lambda X_s-c]ds$$
$$+EI_{(\sigma_1>\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}[\lambda p\mu-c]ds \tag{13}$$

若 $c\geqslant\lambda p\mu$ 则 $E\ [X_{\sigma_k}-c\sigma_k]\leqslant 0$，从而 $E\ [X_\sigma-c\sigma]\leqslant 0$，$\sigma=0$ 最优。若 $\lambda p\mu-c>0$，类似于定理 1，从（13）式出发可以证明 τ_2 是最优停时规则。

定理 3　对于报酬函数 $Y_t=e^{-\alpha t}X_t-c\int_0^t e^{-\alpha s}ds$。

a)　若 $c\geqslant X p\mu$，则 $\sigma=0$ 是最优的，即窃贼不要作案。

b)　若 $c<\lambda p\mu$，则 $\tau_3\triangleq\inf\ \{t\geqslant 0,\ X_t\geqslant\frac{\lambda p\mu-c}{\alpha+\lambda\ (1-p)}\}\ \wedge\sigma_0$ 是最优停时规则。

证明　令 $f_N\ (t,\ i,\ x)\ =e^{-\alpha t}\ (x\wedge N)$，则 $f_N\in\mathscr{D}_{\bar{A}}$. $\forall\ \sigma\in\mathscr{J}_0$，$\sigma_k=\sigma\wedge k$　$(k>1)$. 由 Dynkin 公式，类似于（10）式有：

$$Ee^{-\alpha\sigma_k}X_{\sigma_k}=E\int_0^{\sigma_1}e^{-\alpha s}\cdot\lambda p\mu ds+EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}e^{-\alpha s}[\lambda p\mu-\lambda q x_s-\alpha X_s]ds$$
$$+EI_{(\sigma_1>\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}e^{-\alpha s}\lambda p\mu ds \tag{14}$$

从而

$$E[e^{-\alpha\sigma_k}X_{\sigma_k}-\int_0^{\sigma_k}ce^{-\alpha s}ds]=E\int_0^{\sigma_1}e^{-\alpha s}[\lambda p\mu-c]ds$$
$$+EI_{(\sigma_1>\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}e^{-\alpha s}[\lambda p\mu-c]ds$$
$$+EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}e^{-\alpha s}[\lambda p\mu-c-\lambda q X_s-\alpha X_s]ds \tag{15}$$

若 $c\geqslant\lambda p\mu$，则 $E[e^{-\alpha\sigma_k}X_{\sigma_k}-\int_{\sigma_0}^{\sigma_k}ce^{-\alpha s}ds]\leqslant 0$，$\sigma=0$ 为最优。

若 $c<\lambda p\mu$，从（15）式出发，可证 τ_3 是最优的。

我们最后来研究报酬函数 $Y_t=X_t-\left(1-\prod_{i=1}^{J_t}\delta_i\right)\cdot c_1 J_t$ 的最优停时规则。

令 $w_i=u_i+c_1$，$w=\mu+c_1$，$X'_t=\delta_1\cdot\cdots\cdot\delta_{J_t}\sum_{i=1}^{J_t}w_i$，则上述报酬函数可改写为：

$$Y_t=X'_t-c_1J_t \tag{16}$$

考虑过程 $\{\ (t,\ J_t,\ X'_t)\}_{t\geqslant 0}$，令 $\mathscr{F}'_t\triangleq\sigma\ (\ (J_s,\ X_s),\ s\leqslant t)$，过程 $\{\ (t,\ J_t,\ X'_t)\}_{t\geqslant 0}$ 与 $\{\ (t,\ J_t,\ X_t)\}_{t\geqslant 0}$ 具有类似的性质与弱无穷小算子，只不过把 x 换为 x'，μ 换为 w，$\sigma_0\triangleq\inf\ \{t\geqslant\sigma_1,\ X_t=0\}\ =\inf\ \{t\geqslant\sigma_1,\ X'_t=0\}$，记 $\mathscr{J}'$ 是 $\{\mathscr{F}'_t\}_{t\geqslant 0}$ 停时规则的全体，$\mathscr{J}'_0=\ \{\tau\in\mathscr{J}',\ \tau\leqslant\sigma_0\}$，要求 $\sigma\in\mathscr{J}'$，使得

$$\sup_{\tau\in\mathscr{J}'_0}E[X'_\tau-c_1J_\tau]=E[X'_\sigma-c_1J_\sigma] \tag{17}$$

可以证明

$$\sup_{\tau\in\mathscr{F}'} E[X'_t - c_1 J_\tau] = \sup_{\tau\in\mathscr{F}'} E[X'_\tau - c_1 J_\tau] \tag{18}$$

定理 4 对于报酬函数 $Y_t = X'_t - c_1 J_t$

a）若 $c_1 \geqslant \frac{p}{1-p}\cdot\mu$，则 $\sigma=0$ 是最优的，即不要作案；

b）若 $c_1 < \frac{p}{1-p}\cdot\mu$，则 $\tau_4 = \inf\{t\geqslant 0,\ X'_t \geqslant \frac{p}{1-p}\cdot\mu - c_1\} \wedge \sigma = \inf\{t\geqslant 0,\ X_t + c_1 J_t \geqslant \frac{p}{1-p}\cdot\mu - c_1\} \wedge \sigma_0$ 是最优停时规则。

证明 令 $f_N(t, i, x') = i\wedge N$，$N=1, 2, \cdots$，则 $f_N \in D_{\tilde{A}'}$，其中 $\tilde{A}'$ 是过程 $\{(t, J_t, X'_t)\}_{t\geqslant 0}$ 的弱无穷小算子，$D_{\tilde{A}'}$ 是 $\tilde{A}'$ 的定义域，$\forall\ \sigma\in\mathscr{F}_0$，$\sigma_k = \sigma\wedge k\ (k>1)$，由 Dynkin 公式，令 $N\to\infty$ 可得：

$$EJ_{\sigma_k} = \lambda E\sigma_k \tag{19}$$

另外，类似于式(10)有：

$$EX'_{\sigma_k} = E\int_0^{\sigma_1}\lambda pwds + EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}[\lambda pw - \lambda qX'_s]ds + EI_{(\sigma_1>\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda pwds \tag{20}$$

从而，

$$E[X'_{\sigma_k} - c_1 J_{\sigma_k}] = E\int_0^{\sigma_1}\lambda[p\mu - qc_1]ds + EI_{(\sigma_1\leqslant\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu - qc_1 - qX'_s]ds + EI_{(\sigma_1>\sigma_k)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_k}\lambda[p\mu - qc_1]ds \tag{21}$$

从(21)式出发，类似于定理 1 的证明，可证 a)、b)。

参考文献

1 金治明. 最优停止理论及其应用. 长沙：国防科技大学出版社，1995

2 王梓坤. 随机过程论. 北京：科学出版社，1978

3 Breiman L. Probability Addison-wesley. Reading Mass，1968

4 Dynkin E B. Markov Process. Springer-verlag Berlin，1965，I

5 Yuan Shih Chow，Henry Techer. Probability Theory. Second Edition Springer-verlag，1988

（责任编辑　朱宝龙）