国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第1期 1996年3月 Vol. 18 No. 1

# 正则有理 Bé zier 曲线的等距曲线算法*

方逵 赵军
（国防科技大学系统工程与应用数学系 长沙 410073）

**摘 要** 通过利用改进的有理德卡斯特里奥算法求得正则有理 n 次 Bé zier 曲线各点处的切矢，由此得到各点的单位法矢量，应用于求原始曲线的等距曲线，从而巧妙地解决了原始正则有理 n 次 Bé zier 曲线上各点的单位法矢量难求的困难。该方法几何意义明显，算法简洁，实践效果比较好，最后本文给出了两个实例。

**关键词** CAGD，NURBS，有理 n 次 Bé zier 曲线，等距曲线，有理德卡斯特里奥算法
**分类号** O241.3，O243

# The Algorithm of Offset Curve of the Regular Rational Bé zier Curve

Fang Kui Zhao Jun
(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In this paper, we obtain the tanget vector at each point of the regular rational Bé zier curve of degree n by using the improved rational de Casteljau algorithm. Then we can get the unit normal vector at each point of the original curve. So we have ingeniously overcome the difficulty that the unit normal vector is not easily to be solved at each point. This method has obvious geometric meaning. The algorithm is simple and the result is satisfactory in practice.

**Key word** CAGD, NURBS, rational Bé zier curve of degree n, offset curve, rational de Casteljau algorithm

计算机辅助几何设计（CAGD）领域里非均匀有理 B 样条（NURBS）方法是建立在非有理 Bé zier 方法和非有理 B 样条方法基础上的，具有很好的性质和优点[1]。自 1991 年

* CAD/CG 国家重点实验室基金资助
1995年8月28日收稿

被国际标准组织(ISO)正式颁布的工业产品几何定义的STEP标准定为唯一的统一数学方法，NURBS在CAD/CAM与计算机图形学领域越来越受到普遍重视和获得广泛的应用。与此同时，一些CAD商品软件系统纷纷开发和推出NURBS功能，可以断言今后的CAD软件系统若没有NURBS功能将没有生命力。

等距曲线在工业中有很多应用，例如在机械加工中的数控机床加工，汽车工业中的外形设计。已有一些作者讨论过等距曲线的生成问题[2,3,4,7]，但是这些方法所讨论的是非有理的B样条、Bé zier曲线、三次样条曲线等，而今后的CAD软件系统将采用NURBS作为标准，因此，我们有必要讨论NURBS的等距曲线。

## 1 预备知识

### 1.1 有理n次Bé zier曲线

对于一节点分划：

$$\triangle: u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant u_{n+k+1}$$

可定义一条$k$次NURBS曲线,其分段有理分式形式为

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \boldsymbol{d}_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(u)} \tag{1}$$

其中$w_i$（$i=0, 1, \cdots, n$）称为NURBS的权因子，其与控制顶点$\boldsymbol{d}_i$（$i=0, 1, \cdots, n$）相联系，（$w_i\boldsymbol{d}_i$，$w_i$）则称为带权控制顶点。为防止（1）式分母为零，规定$w_0$，$w_n>0$，$w_i \geqslant 0$（$i=0, 1, \cdots, n-1$）；$N_{i,k}$（$u$）则是由分划△按德布尔——考克斯[8]递推公式决定的$k$次规范B样条基函数。

若NURBS两端节点的重复度取为$k+1$，即$u_0=u_1=\cdots=u_k$，$u_{n+1}=u_{n+2}=\cdots=u_{n+k+1}$，且在实际应用中常取$u_k=0$，$u_{n+1}=1$，则$u\in[u_k, u_{n+1}]=[0, 1]$。若$n=k$，则$k$次NURBS就成为有理$n$次Bé zier曲线，相应地$n$次规范B样条基函数$N_{i,n}$（$u$）则成为$n$次Bernstein基函数$B_{i,n}$（$u$），从而得有理$n$次Bé zier曲线的有理分式表示：

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \boldsymbol{d}_i B_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,k}(u)} \tag{2}$$

它实际上是带权控制顶点($w_i\boldsymbol{d}_i$, $w_i$)($i=0,1,\cdots,n$)定义的非有理$n$次Bé zier曲线在$w=1$超平面上的投影。

### 1.2 等距(offset)曲线

设原始曲线为

$$\boldsymbol{C}(u) = \{x(u), y(u)\} \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

则它的距离为$r$的等距曲线为

$$\boldsymbol{C}_r(u) = \boldsymbol{C}(u) + r\boldsymbol{N}(u) \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{N}(u)$为$\boldsymbol{C}(u)$上对应参数$u$处的单位法矢量

$$N(u)=\frac{(-y'(u),x'(u))}{\sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)}}$$

### 1.3 改进的有理德卡斯特里奥算法[5]

由 1.1 我们知，有理 Bé zier 曲线在投影前是带权控制顶点定义的非有理 Bé zier 曲线，则我们可将非有理 Bé zier 曲线的德卡斯特里奥算法直接推广为有理 Bé zier 曲线的德卡斯特里奥算法，即分别对（2）式中分子与分母进行德卡里特斯奥算法。但是，这会带来一些问题。例如：某些权因子过大时，中间控制顶点就不再在原始控制多边形的凸包内，使曲线丧失凸包性，得到坏的曲线。

法林在此算法的基础上提出了改进的有理德卡斯特里奥算法

$$P(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n-k} w_i \boldsymbol{d}_i^{(k)} B_{i,n-k}(u)}{\sum_{i=0}^{n-k} w_i B_{i,n-k}(u)}=\cdots=\boldsymbol{d}_0^{(n)}$$

其中 $\boldsymbol{d}_i$ 均为有限远控制顶点（其权因子不为零）

$$\boldsymbol{d}_i^{(k)}=\begin{cases}\boldsymbol{d}_i & k=0\\ (1-u)\dfrac{w_i^{(k-1)}}{w_i^{(k)}}\boldsymbol{d}_i^{(k-1)}+u\dfrac{w_{i+1}^{(k-1)}}{w_i^{(k)}}\boldsymbol{d}_{i+1}^{(k-1)} & k=1,2,\cdots,n\\ & i=0,1,\cdots,n-k\end{cases}$$

权因子

$$w_i^{(k)}=\begin{cases}w_i & k=0\\ (1-u)w_i^{(k-1)}+uw_{i+1}^{(k-1)} & k=1,2,\cdots,n;\ i=0,1,\cdots,n-k;\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{d}_i^{(k)}$ 位于原始控制多边形的凸包内，从而保证了 Bé zier 曲线的凸包性。

## 2 正则有理 n 次 Bé zier 曲线的等距曲线

由 1.2 我们知道，只要求出原始曲线上各个点处的单位法矢量，就可以很容易由(3)式得到其等距曲线，但是单位法矢量 $N(u)$一般不容易求得。如果我们能求得原始曲线上各个点处的切矢量 $\boldsymbol{T}(u)$，则可由下面式子得到原始曲线上各个点处的单位法矢量

$$\boldsymbol{N}(u)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\frac{\boldsymbol{T}(u)}{|\boldsymbol{T}(u)|} \tag{4}$$

由于讨论的是正则曲线,所以(4)式中 $|\boldsymbol{T}(u)|\neq 0$。

对于式(1)

$$P(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i\boldsymbol{d}_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(u)}$$

其切矢并不好求。因为上式右端乃是一个分式，这样对有理 $n$ 次 Bé zier 曲线的导矢计算太复杂，不适于实际应用中的数值运算。刘鼎元[9]虽提出改写形式，但是导矢计算仍较麻烦，且其得到的导矢计算公式几何意义不明显。

下面我们利用改进的有理德卡斯特里奥算法来求有理 $n$ 次 Bé zier 曲线的各点处切矢。由改进的有理德卡斯特里奥算法的执行过程，可知有理 $n$ 次 Bé zier 曲线上点 $\boldsymbol{d}_0^{(n)}$

($u$) 和 $d_0^{(n-1)}$ ($u$), $d_1^{(n-1)}$ ($u$) 的连线相切（因为有理 $n$ 次 Bé zier 曲线与 $d_0^{(n-1)}$ ($u$), $d_1^{(n-1)}$ ($u$) 的连线只有一个公共点，且有理 $n$ 次 Bé zier 曲线在 $d_0^{(n-1)}$ ($u$), $d_1^{(n-1)}$ ($u$) 连线的一侧），所以在 $d_0^{(n)}$ ($u$) 处有理 $n$ 次 Bé zier 曲线的切矢量与矢量 $d_1^{(n-1)}$ ($u$), $d_0^{(n-1)}$ ($u$) 平行且同方向，则可令

$$\frac{\boldsymbol{T}(u)}{|\boldsymbol{T}(u)|}=\frac{\boldsymbol{d}_1^{(n-1)}(u)-\boldsymbol{d}_0^{(n-1)}(u)}{|\boldsymbol{d}_1^{(n-1)}(u)-\boldsymbol{d}_0^{(n-1)}(u)|}$$

从而由 (4) 式很容易求得有理 $n$ 次 Bé zier 曲线在各个点处的单位法矢量，且这样计算单位法矢量表达式简洁，计算方便，而且通过

$$\boldsymbol{C}_r(u)=\boldsymbol{C}(u)+r\boldsymbol{N}(u)$$

得到的是原始曲线的精确等距曲线，这是其它方法所无法比拟的。

## 3 实践例子

我们将本文的方法应用于 CSCAD 系统的研制中，下面两图是用该方法得到的两个例子，所用的曲线分别是有理三次 Bé zier 曲线和有理五次 Bé zier 曲线，其效果令人比较满意，且执行速度相当快。

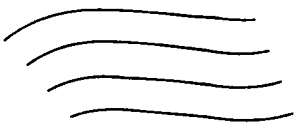

图 1

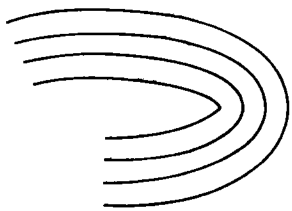

图 2

## 参 考 文 献


1 Piegl L. On NURBS: A Survey, IEEE CG&A, 1991 (1)

2 Klass R. An Offset Approximation for Plane Cubic Splines, Computer Aided Design, 1988 (20)

3 Fham B. Offsets Approximation of Uniform B-splines. Computer Aided Design, 1988 (20)

4 Tiller Hanson E. Offsets of Two-dimensional Profile, IEE, Computer Graph&Applic, 1984 (9)

5 Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide, Academic Press, 1988

6 方逵，张启松. 计算机辅助几何设计. 河北教育出版社，1994

7 王兴波. 正则 B 样条曲线的等距线计算. 工程图学（专刊），1994

8 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京航空航天大学出版社，1994: 48

9 刘鼎元. 有理 Bé zier 曲线. 应用数学学报，1984 (4)


（责任编辑　卢天贶）