国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 18 卷第 1 期　1996 年 3 月　Vol. 18 No. 1

基于 Fuzzy 数序的多属性决策与综合评判模型*

武小悦

（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　本文讨论了在多属性决策与综合评判问题中存在的 Fuzzy 不确定性，并给出了 Fuzzy 数的排序方法及有关线性运算法则。在此基础上提出了考虑 Fuzzy 不确定性的多属性决策及综合评判模型。

关键词　Fuzzy，多属性决策，综合评判

分类号　C934

Fuzzy Number Ordering Based Models for Multiattribute Decision Making and Synthetic Evaluation

Wu Xiaoyue

(Department of Systems Englneering and Mathematlcs, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　In this paper, fuzziness that exists in the MADM and synthetic evaluation problems is discussed, and the ordering method of fuzzy number and its linear operation laws are introduced. Based on the ordering of fuzzy number, the author presented new models for MADM and synthetic evaluation, which can take the fuzziness into consideration.

Key words　fuzzy, multiattribute decision making, synthetic evaluation

多属性决策（MADM）和综合评判问题在经济决策、项目选择与评估、武器装备型号选择等诸方面均有着广泛的应用。目前已经提出了许多有关求解方法，如 Electre，AHP，Topsis，Fuzzy 综合评判等[1][2][3]，但这些方法大都未能很好地考虑存在于这类问题中的模糊、不确定性问题。这类方法大都要求给出权重，但由于人的思维偏好具有本质模糊性，因此，仅仅用一个固定的权重值来代表偏好程度难以反映实际情况。其次，由于在许多实际问题中，评价指标与属性值本身就是非量化指标（如生态环境影响，装备

* 1995 年 4 月 7 日收稿

先进性等)，再加之人为给定时的主观判断以及信息的不完全性（例如航天器的研制费用)，因此，这些 Fuzzy 不确定性也是存在的。

本文对于考虑这些 fuzzy 不确定性的建模及求解进行了探讨，提出了基于 fuzzy 数序的多属性决策模型及综合评判模型，为求解此类问题开创了一条新的途径。

1 Fuzzy 数的排序与 Fuzzy 数的线性运算

1.1 Fuzzy 数的排序

定义 1 Fuzzy 数 A 是实轴 R 上满足以下性质的 Fuzzy 集[4]:

(1)连续性:A 的隶属度函数 $\mu_A(\cdot)$是 R 上的连续函数。

(2)有界闭性:A 的支集 $\mathrm{supp}(A)=\{x\}x\in R,\mu_A(x)>0\}$是 R 中的有界闭集。

本文采用由 Choobineh 和 Li 提出的方法来规定 Fuzzy 数集的“大”“小”序结构。这种方法具有不低于通常采用的 Yager 法的分辨灵敏度[5],而且对不同类型的 Fuzzy 数均能给出较好的比较结果。

定义 2 设 A 是 R 上的 Fuzzy 集,则定义 A 的高度 h_A 为:$h_A=\max\mu_A(x)$

定义 3 定义 A 的 α 水平截集为

$$A(\alpha)=\{x\,|\,x\in R,\mu_A(x)\geqslant\alpha\}\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

定义 4 定义 A 的左(右)轨线 $f_A(g_A)$为:

(1)若 $A(\alpha)$连通集时

$$f_A(\alpha)=\min\{x\,|\,x\in A(\alpha)\}\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant h_A$$

$$g_A(\alpha)=\max\{x\,|\,x\in A(\alpha)\}\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant h_A$$

(2)若 $A(\alpha)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{x\,|\,a_i\leqslant x\leqslant b_i\}$,其中 $a_1\leqslant b_1\leqslant a_2\leqslant b_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant a_n\leqslant b_n$. 则

$$f_A(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i-a_i)/\sum_{i=1}(b_i-a_i)$$

$$g_A(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}b_i(b_i-a_i)/\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

定义 5 设 a,d 分别为取定的 R 上的两个数,使得:$\mathrm{supp}(A)\subset[a,d]$,则定义

$$D_f=\int_0^{h_A}(f_A(\alpha)-a)\mathrm{d}\alpha,\ D_g=\int_0^{h_A}(d-g_A(\alpha))\mathrm{d}\alpha$$

定义 6 模糊数 A 的序列 $R(A)$定义为[5]

$$R(A)=\frac{1}{2}\left(h_A-\frac{D_g-D_f}{d-a}\right)$$

依据 $R(A)$的大小,即可表示出 A 的“大”“小”。$R(A)$越大,A 越“大”。

1.2 Fuzzy 数的线性运算

在本文的 Fuzzy MADM 模型解法中，用到形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iA_i$ 的运算，其中 $\alpha_i\in R$，$\alpha_i\geqslant 0$，$A_i\in\widetilde{R}$（$\widetilde{R}$ 是 R 上的 Fuzzy 数全体)。这种 Fuzzy 数的线性运算是由 Fuzzy 集的分解定理及 Fuzzy 扩展原理所规定的[4]。通过它们的应用可以将 Fuzzy 数的运算化为（广义）闭区间数的运算。

定义 7 广义闭区间数 x 为有限个互不相交的闭区间的并，即：$x=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$。其中 $[a_i,b_i](i=1,2,\cdots,n)$ 为 R 上的互不相交的闭区间。

由扩展原理易得如下运算法则成立：$ax=\bigcup_{i=1}^{n}[aa_i,ab_i]$，$x+y=\bigcup_{i,j}[a_i+c_j,b_i+d_j]$。其中 $y=\bigcup_{j=1}^{m}[c_j,d_j]$。

应当注意，由定义 3 给出的 Fuzzy 数 A 的 α 水平截集一般为广义闭区间数。

定义 8 设 A，B 为 R 上的 Fuzzy 数，定义：$A_\lambda \triangleq \{x\mid \mu_A(x)\geqslant\lambda\}=A(\lambda)$，$(\lambda A)(x)\equiv\lambda\wedge\mu_A(x)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$。其中 $\wedge$ 为取小算子。

由分解定理，有： $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$， $B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda B_\lambda$

由多元扩展原理，由 R 上的二元代数算子 $*$ 可诱导出两个模糊集之间的 $*$ 运算法则为

$$*:\widetilde{R}\times\widetilde{R}\rightarrow\widetilde{R}$$
$$(A,B)\rightarrow A*B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda*B_\lambda)$$

其中 $A_\lambda*B_\lambda=\{z\mid\exists\ (x,y)\in A_\lambda\times B_\lambda,\ x*y=z\}$.

由于 λA 与 $A*B$ 的法则均已给出，且对 Fuzzy 数 A、B 而言，A_λ、B_λ 均为广义闭区间数，其线性法则亦已给出，因此形如 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iA_i$ 的运算法则已明确定义。

2 Fuzzy 多属性决策的理想解模型

2.1 Fuzzy 理想解模型

为了在 MADM 中考虑权重和指标值的 Fuzzy 不确定性，在本文模型中，设权重和属性值为 Fuzzy 数，从而建立 Fuzzy 理想解模型。这种模型的思路是：在候选方案中选择距所谓“理想解”距离“最近”的方案作为最满意方案[1][2]。

设候选方案集为 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$，属性指标集为 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$。第 k 个属性指标的权重 ω_k 为论域 $[0,1]$ 上的 Fuzzy 数，第 i 个候选方案的第 j 个属性值为 Fuzzy 数 $\bar{a}_{ij}$。

对决策求解而言，候选方案 S_i 可用模糊向量 $\{\bar{a}_{i1}\cdots,\bar{a}_{ij},\cdots,\bar{a}_{ip}\}$ 表示。若将 $\underset{\sim}{A}=\{\bar{a}_{ij}\}_{\max}$ 定义为 Fuzzy 决策矩阵，则我们要求解的问题是：在已知 $\underset{\sim}{A}$ 及 Fuzzy 权向量 $\widetilde{\omega}=\{\widetilde{\omega}_k\}_n$ 的条件下，如何对各候选方案进行优劣排序。

2.2 模型的解法

运用“理想解”的概念求解本文提出的 Fuzzy 多属性决策模型，必须解决两个关键问题：一是如何构造“理想解”；二是如何合理测度到“理想解”的距离。本文利用 Fuzzy 数的排序法解决这两个问题。以下给出具体方法步骤：

(1) 求 Fuzzy 理想解

若
$$R(\bar{a}_{ij})=\begin{cases}\max R(\bar{a}_{ij}) & (\text{若 } j \text{ 属性值越大越好})\\ \min R(\bar{a}_{ij}) & (\text{若 } j \text{ 属性值越小越好})\end{cases}$$
$$\bar{a}_j^*=\bar{a}_{kj}\quad i=1,2,\cdots,m,\ i=1,2,\cdots,p$$

则定义 Fuzzy 理想解 S^* 为：$S^* = \{\tilde{a}_1^*, \tilde{a}_2^*, \cdots, \tilde{a}_j^*, \cdots, \tilde{a}_p^*\}$。其中 $R(\tilde{a}_{ij})$ 为由定义 6 给出的 Fuzzy 数 $\tilde{a}_{ij}$ 的序数。

（2）求每一候选方案 S_i 到 S^* 的 Fuzzy 加权距离 $\tilde{d}_i$

若定义 $\tilde{a}_{ij}$ 与 $\tilde{a}_j^*$ 之间的 Fuzzy 帖近度 d_{ij} 为

$$d_{ij} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{a}_i^*(x) \wedge \tilde{a}_{ij}(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{a}_j^*(x) \vee \tilde{a}_{ij}^*(x) dx}$$

则

$$\tilde{d}_i = \tilde{d}(S^*, S_i) = \sum_{j=1}^{p} \omega_j d_{ij}, \quad \tilde{\omega}_j \in \tilde{\omega}$$

$\tilde{\omega}_j$ 为第 j 个属性指标的 Fuzzy 权。

（3）将候选方案排序

设有 $R(\tilde{d}_{i_1}) \leqslant R(\tilde{d}_{i_2}) \leqslant \cdots \leqslant R(\tilde{d}_{i_m})$，则各方案的优劣排序为 S_{i_1}，S_{i_2}，…，S_{i_m}.

3 具有 Fuzzy 权的 Fuzzy 综合评判模型

一般文献中介绍的 Fuzzy 综合评判模型只考虑了评价域的 Fuzzy 不确定性[4]，而对于评判的不同侧面（或指标）的权重的处理却看作固定值。本文将权重处理为 Fuzzy 数，再利用 Fuzzy 数排序与 Fuzzy 数线性运算原理，较自然地处理了这两类不确定性。

3.1 Fuzzy 综合评判模型

设采用 n 个因素(或指标)刻划某类事物。设因素集为 $U=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$，可能出现的评语有 m 个，评语集为 $\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m\}$。对每个待评事物，可以得出单因素评判矩阵：

$$\underset{\sim}{R} = \{r_{ij}\}_{n\times m} = [\underset{\sim}{R}_1^T \cdots \underset{\sim}{R}_n^T]^T$$

其中 ν_{ij} 表示该事物关于 u_i 具有评语 ν_i 的程度，$\underset{\sim}{R}_i$ 论域 ν 上的 Fuzzy 集[3]。

利用集值统计法，可以建立各因素的 Fuzzy 权向量：$\underset{\sim}{W}=(\underset{\sim}{\omega}_1,\underset{\sim}{\omega}_2,\cdots,\underset{\sim}{\omega}_n)$。其中 $\underset{\sim}{\omega}_i$ 为 $[0,1]$ 上的正规凸 Fuzzy 集。

现在的问题是在已知 $\underset{\sim}{R},\underset{\sim}{W}$ 情况下进行综合评判。

3.2 综合评判方法

应用矩阵的复合运算法则及 Fuzzy 评判原理，可以将 $\underset{\sim}{R}$ 变换为 ν 上的模糊评判向量。

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{\omega}_1, \underset{\sim}{\omega}_2, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n) \circ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nm} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_i \nu_{ij}, \cdots, \sum_{j=1}^{m} \omega_n \nu_{ij} \right) = (b_1, b_2, \cdots, b_j, \cdots, b_m)$$

由于 $\sum\limits_{j=1}^{n} \underset{\sim}{\omega_i \nu_{ij}}$ 是 Fuzzy 数的线性运算，由 1.2 可知其含义及算法，故 $\sum\limits_{j=1}^{n} \underset{\sim}{\omega \nu_{ij}}$ 仍为 Fuzzy 集。这里 b_j 表示该事物属于评语 ν_j 的程序是 R 上的模糊数。根据 R 上的 Fuzzy 数的排序方法，可以算出 $R(b_j)$ 的大小，从而可以将该事物评判为 $R(\cdot)$ 最大的那一类。

4 结束语

本文在提出的 Fuzzy MADM 模型及综合评判模型时，考虑了存在于决策与评价问题中的 Fuzzy 不确定性，从而会使得决策与评价结果比现有方法具有更好的“鲁棒性(Robust)”或对不确定性的稳健性。因为在实际决策与评价问题中，Fuzzy 权和指标值大都采用集值统计原理得出。因此，模型中的 Fuzzy 数大都为具有阶梯型分布的 Fuzzy 集。在计算机上不难实现其线性运算及序数计算。因而本文提出的模型及方法具有一定的实用价值。

在决策与评价研究领域仍有大量有待于解决的问题，如“理想点”的合理定义问题，目标的相关性问题等。对“理想解”及 Fuzzy 序如何更为合理地定义，今后仍需作进一步的探讨，本文仅为解决其中的不确定性问题提供了一类探索性的思路和途径。

参 考 文 献

1 宣家骥. 多目标决策. 长沙：湖南科学技术出版社，1989：314～341

2 姜旭平. 信息系统分析——概念·结构·机理·分支与发展. 长沙：湖南科学技术出版社，1993. 295～319

3 汪培庄，韩立岩. 应用模糊数学. 北京：北京经济学院出版社，1989. 160～167

4 罗承中. 模糊集引论(上册). 北京，北京师范大学出版社，1989. 197～214

5 Choobineh F，Li. H A. Index For Ordering Fuzzy Numbers. Fuzzy Set and Systems，1993，54. 287～294

（责任编辑　潘　生）