国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第2期 1996年6月 Vol. 18 No. 2

连续时间参数滤波问题的非标准方法*

李 兵

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文应用非标准分析中的Nelson近初等过程方法，得到了与标准的连续时间参数滤波问题等价的近初等过程的滤波公式，并由此得到了标准的连续时间参数情形的滤波公式。

关键词 近初等过程，滤波，最佳线性预测，误差

分类号 O141.41,O211

A Nonstandard Filtering Method of a Continuous Parameter Process

Li Bing

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha 410073)

Abstract In this paper, using the method of Nelson's nearly elementary process, we obtain a nonstandard filtering formula of a nearly elementary process, which is equivalent to a standard filtering formula of a continuous parameter process, and thereby we obtain Kalman's filtering formula of a continuous parameter process.

Key words nearly elementary process, filtering, best linearly forcasting, error

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一概率空间，定义其上的二阶矩变量全体记为 $\mathscr{L}$，$X=(X(t), t\in T)$ 为二阶矩过程，令 $\mathscr{U}_X=\{\sum_{j=1}^{n}c_jX(t_j);\ n\geqslant 1,\ t_j\in T,\ c_j\in R,\ j=1,\cdots,n\}$，$\mathscr{L}_X=\{\xi\in\mathscr{L}:\ \exists\ \xi_n\in\mathscr{U}_X$，使 $\|\xi_n-\xi\|_{L_2}\to 0\}$，其中 $\|\cdot\|_{L_2}$ 表示 $\mathscr{L}$ 中的均方范数。设 $\xi\in\mathscr{L}$，若存在 $\hat{\xi}\in\mathscr{L}_X$，使得 $\|\xi-\hat{\xi}\|^2_{L_2}=\inf\{\|\xi-\eta\|^2_{L_2}:\ \eta\in\mathscr{L}_X\}$，则称 $\hat{\xi}$ 为 ξ 关于 $\mathscr{L}_X$ 的最佳线性预测，$\sigma^2\triangleq\|\xi-\hat{\xi}\|^2_{L_2}$ 称为误差。关于最佳线性预测及误差的一些性质参见文[1]。

* 国家自然科学基金及国防科技大学青年基金资助课题
1996年1月6日收稿

以下给出 Nelson 关于近初等过程的定义，关于非标准分析的一般结论可参见文[2]。设 $(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0)$ 为一通常概率空间，指标集 $T_0 \subset R$，由转移原理得 $({}^*\Omega_0, {}^*\mathscr{F}_0, {}^*P_0)$ 及指标集 ${}^*T_0$。假定模型是多饱和的，故存在超有限 T，使得 $T_0 \subset T \subset {}^*T_0$.

定义 1 设 ξ_0 是 $T_0 \times \Omega_0 \to R$ 的随机过程，ξ 是 $T \times {}^*\Omega_0 \to {}^*R$ 的随机过程，且 $\forall t \in T$，$\xi(t)$ 仅取超有限个值。若除去一个 ${}^*P_0$ 无穷小测度集外，有

$$\sum_{t \in T} |\xi(t) - {}^*\xi_0(t)| \approx 0$$

则称 ξ 为 ξ_0 的一个近初等过程。

若 $\xi_0 \in \mathscr{L}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$，还可要求

$$\sum_{t \in T} \| \xi(t) - {}^*\xi_0(t) \|_{L_p} \approx 0$$

此时称 ξ 为 ξ_0 的一个 L_p 近初等过程。

引理 1[3] 设 ξ_0 是 $(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0)$ 上以 T_0 为指标集的过程，则必存在它的一个近初等过程 ξ。若 $\xi_0 \in \mathscr{L}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$，则 ξ 还可取为 ξ_0 的一个 L_p 近初等过程。

注：对一般非随机函数 f_0: $T_0 \to R$，亦存在一近初等函数 f: $T \to {}^*R$，使得 $\sum_{t \in T} |f(t) - {}^*f_0(t)| \approx 0$。

引理 2 设 f_0 为 R_+ 上连续函数，$\xi_0 = (\xi_0(t), t \in R_+)$ 为均方连续的二阶矩过程，$\eta_0 = (\eta_0(t), t \in R_+)$ 为基本正交增量过程，则 $\forall t \in T$

$$\int_0^t {}^*f_0(s) {}^*\xi_0(s) \mathrm{d}s \approx \sum_{\substack{s<t \\ s \in T}} f(s) \xi(s) \mathrm{d}s$$

$$\int_0^t {}^*f_0(s) \mathrm{d} {}^*\eta_0(s) \approx \sum_{\substack{s<t \\ s \in T}} f(s) \mathrm{d}\eta(s)$$

其中 f: $T \to {}^*R$ 为 f_0 的近初等函数，$\xi = (\xi(t), t \in T)$，$\eta = (\eta(t), t \in T)$ 分别为 ξ_0 与 η_0 的 L_2 近初等过程。$\forall s \in T$，$\mathrm{d}s$ 表示 s 在 T 的后继元，$\mathrm{d}\eta(s) \equiv \eta(s + \mathrm{d}s) - \eta(s)$.

证明 因篇幅有限，证略。

设 $(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0)$ 为一通常概率空间，定义于其上的均方连续的二阶矩过程 $X = (X_0(t), t \in R_+)$ 称为状态过程，均方连续的二阶矩过程 $Y = (Y_0(t), t \in R_+)$ 称为观察过程，它们满足下面的状态方程与观察方程：

$$\mathrm{d}X_0(t) = a_0(t) X_0 \mathrm{d}t + b_0(t) \mathrm{d}W_0(t) \tag{1}$$

$$\mathrm{d}Y_0(t) = c_0(t) X_0(t) \mathrm{d}t + d_0(t) \mathrm{d}V_0(t) \tag{2}$$

其中 W_0, V_0 均为基本正交增量过程，且不妨设 $W_0(0) = V_0(0) = 0$，$a_0(t), b_0(t), c_0(t), d_0(t) \neq 0$ 为 R_+ 上非随机的连续函数。假设

$$X_0(0) \perp W_0, X_0(0) \perp V_0, W_0 \perp V_0 \tag{3}$$

这里 $\perp$ 表示正交（如 $X_0(0) \perp W_0$，即 $\forall t \in R_+$，$(X_0(0), W_0(t)) = 0$）. $\mathscr{U}_{y_0}(t) \equiv \{\sum_{j=1}^n c_j Y_0(t_j): n \geqslant 1, c_j \in R, t_j \in R_+, t_j \leqslant t, j = 1, 2, \cdots, n\}$，$\mathscr{L}_{y_0}(t) \equiv \{\xi \in \mathscr{L}: \exists\ \xi_n \in \mathscr{U}_{y_0}(t)$，使得 $\|\xi_n - \xi\|_{L_2} \to 0\}$. $X_0(t)$ 关于 $\mathscr{L}_{y_0}(t)$ 的最佳线性预测记为 $\hat{X}_0(t)$，滤波误差记为 $\sigma_0(t) = \|X_0(t) - \hat{X}_0(t)\|^2$（注意今后为了记号简便，用 $\sigma_0(t)$ 表示误差，而不同前面类似用 $\sigma_0^2(t)$）。

定理1 设条件(1)(2)(3)成立，则存在 X_0,Y_0 的 L_2 近初等过程 $X=(X(t),t\in T),Y=(Y(t),t\in T)$。若记 $\mathscr{L}_y(t)=\{\sum_{j=1}^{n}c_jY(t_j):n\leqslant r,c_j\in T,t_j\leqslant t,j=1,\cdots,n\}$(其中 r 为 T 的个数)，$X(t)$ 关于 $\mathscr{L}_y(t)$ 的最佳线性预测记为 $\hat{X}(t)$，即 $\hat{X}(t)\in\mathscr{L}_y(t)$，且 $\forall\ \xi\in\mathscr{L}_y(t)$，有 ${}^*E|X(t)-\hat{X}(t)|^2\leqslant{}^*E|X(t)-\xi|^2$。记 $\sigma(t)\equiv{}^*E|X(t)-\hat{x}(t)|^2$，则对 $\forall\ t\in T'$，有

$$\mathrm{d}\,\hat{X}(t)\approx a(t)X(t)\mathrm{d}t+\frac{\sigma(t)c(t)}{\mathrm{d}^2(t)}(\mathrm{d}Y(t)-c(t)\,\hat{X}(t)\mathrm{d}t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\approx 2a(t)\sigma(t)-\left[\frac{c(t)}{\mathrm{d}(t)}\right]^2\sigma^2(t)+b^2(t)$$

其中 $t+\mathrm{d}t$ 表示 T 中 t 的后继元，$\mathrm{d}\,\hat{X}(t)\equiv X(t+\mathrm{d}t)-X(t)$，$\mathrm{d}\sigma(t)\equiv\sigma(t+\mathrm{d}t)-\sigma(t)$，用 b 表示 T 中的最大元，$T'\equiv T\backslash\{b\}$。

证明 由引理1知：对二阶矩过程 $X_0=(X_0(t),t\in R_+)$，$Y_0=(Y_0(t),t\in R_+)$，$W_0=(W_0(t),t\in R_+)$，$V_0=(V_0(t),t\in R_+)$，分别存在其 L_2 近初等过程 $X=(X(t),t\in T)$，$Y=(Y(t),t\in T)$，$W=(W(t),t\in T)$，$V=(V(t),t\in T)$，其中指标集 T 为超有限集，$R_+\subset T\subset{}^*R_+$，由于 W_0 是基本正交增量过程，$\forall\ t_1<t_2\leqslant t_3<t_4,t_i\in R_+,i=1,2,3,4$，故

$$\mathrm{E}(W_0(t_2)-W_0(t_1))(W_0(t_4)-W_0(t_3))=0$$

$$E|W_0(t_2)-W_0(t_1)|^2=t_2-t_1$$

由转移原理，$\forall\ t_1<t_2\leqslant t_3<t_4,t_i\in{}^*R_+,i=1,2,3,4$，有

$${}^*\mathrm{E}({}^*W_0(t_2)-{}^*W_0(t_1))({}^*W_0(t_4)-{}^*W_0(t_3))=0$$

$${}^*E|{}^*W_0(t_2)-{}^*W_0(t_1)|^2=t_2-t_1$$

因 $R_+\subset T\subset{}^*R_+$，$W$ 为 W_0 的 L_2 近初等过程，从而 $\forall\ t_1<t_2\leqslant t_3<t_4,t_i\in T,i=1,2,3,4$，有

$${}^*\mathrm{E}(W(t_2)-W(t_1))(W(t_4)-W(t_3))\approx 0$$

$${}^*\mathrm{E}|W(t_2)-W(t_1)|^2\approx t_2-t_1$$

不妨称 $W=(W(t),t\in T)$ 具有 * 基本正交增量性，同理，$V=(V(t),t\in T)$ 亦具有 * 基本正交增量性。由于 $X_0(0)\perp W_0$，即 $\forall\ t\in R_+$，$\mathrm{E}(X_0(0))W_0(t))=0$，同上作法类似，通过转移原理，即得 $\forall\ t\in T$，有 ${}^*\mathrm{E}(X(0)W(t))\approx 0$，不妨称 $X(0)$ 与 W * 正交。同理，$X(0)$ 与 V * 正交，W 与 V * 正交。

由条件(1)知：$\forall\ t_1<t_2,t_j\in R_+,i=1,2$.

$$X_0(t_2)-X_0(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}a_0(t)X_0(t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}b_0(t)\mathrm{d}W_0(t)$$

从而由转移原理，$\forall\ t_1<t_2,t_i\in{}^*R_+,i=1,2$，

$$\begin{aligned}{}^*X_0(t_2)-{}^*X_0(t_1)&={}^*\left(\int_{t_1}^{t_2}a_0(t)X_0(t)\mathrm{d}t\right)+{}^*\left(\int_{t_1}^{t_2}b_0(t)\mathrm{d}W_0(t)\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}{}^*a_0(t)\,{}^*X_0(t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}{}^*b_0(t)\mathrm{d}\,{}^*W_0(t)\end{aligned}$$

再由引理2，即得 $\forall\ t_1<t_2,t_i\in T,i=1,2$，

$$X(t_2)-X(t_1)\approx\sum_{\substack{t_1\leqslant s<t_2\\ s\in T}}a(s)X(s)\mathrm{d}s+\sum_{\substack{t_1\leqslant s<t_2\\ s\in T}}b(s)\mathrm{d}W(s)$$

故对 $\forall\ t\in T$，有

$$X(t+\mathrm{d}t)-X(t)\approx a(t)X(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}W(t) \tag{1}$$

类似地，有观察方程

$$Y(t+\mathrm{d}t)-Y(t)\approx c(t)X(t)\mathrm{d}t+d(t)\mathrm{d}V(t) \tag{2}$$

以及

$$X(0)^{*}\perp W,\ X(0)^{*}\perp V,\ W^{*}\perp V \tag{3}$$

其中$^{*}\perp$表示前面所言的 * 正交。为了简便起见，记 $W'(t)\equiv\mathrm{d}W(t)$，$V'(t)\equiv\mathrm{d}V(t)$，$Y'(t+\mathrm{d}t)\equiv\mathrm{d}Y(t)$（$\forall\ t\in T'$），则由(1)(2)(3)

$$X(t+\mathrm{d}t)\approx(a(t)\mathrm{d}t+1)X(t)+b(t)W'(t) \tag{1$'$}$$

$$Y'(t+\mathrm{d}t)\approx c(t)X(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}(t)V'(t) \tag{2$'$}$$

$$X(0)^{*}\perp W',X(0)^{*}\perp V',W'^{*}\perp V' \tag{3$'$}$$

且 $\mathscr{L}_y=\mathscr{L}_y(t)$. 故$\hat{X}(t)$可视为 $X(t)$关于 $\mathscr{L}_y(t)$的最佳线性预测，记$\overline{X(t+\mathrm{d}t)}$与$\overline{Y(t+\mathrm{d}t)}$分别为 $X(t+\mathrm{d}t)$与 $Y(t+\mathrm{d}t)$关于 $\mathscr{L}_y(t)$的最佳线性预测，则由(1)′及[1]中定理 5.2($P63$)得：

$$\overline{X(t+\mathrm{d}t)}\approx(a(t)\mathrm{d}t+1)\,\hat{X}(t)$$

由(1)′(2)′(3)′可知：

$$X^{*}\perp V'$$
$$W'(t)^{*}\perp\{X(0),\cdots X(t)\}$$
$$W'(t)^{*}\perp\{Y'(0),\cdots,Y'(t)\}$$
$$V'(t)^{*}\perp\{Y'(0),\cdots,Y'(t)\}$$

由此及文[1]中定理 5.1($P60$)可知：$\hat{V}(t)_{\mathscr{L}_y(t)}\approx0$。这样，由(2)′及[1]中定理 5.2($P63$)有：

$$\overline{Y'(t+\mathrm{d}t)}\approx c(t)\mathrm{d}t\,\hat{X}(t)$$

定义

$$Z(t+\mathrm{d}t)\equiv Y'(t+\mathrm{d}t)-\overline{Y'(t+\mathrm{d}t)}$$
$$Z(0)\equiv Y(0)$$

由文[1]中定理 5.1 知，$Z(t+\mathrm{d}t)^{*}\perp\mathscr{L}_y(t)$，故可归纳证得

$$(Z(t),Z(s))\approx0\qquad\forall\ t\neq s$$
$$\mathscr{L}_Z(t)=\mathscr{L}_y(t)$$

这样由文[1]中定理 5.3 以及一个观察值情形的结论可得

$$\begin{aligned}\hat{X}(t+\mathrm{d}\,t)&=(t+\mathrm{d}t)+h(t+\mathrm{d}t)Z(t+\mathrm{d}t)\\&\approx(a(t)\mathrm{d}t-1)\hat{X}(t)+h(t+\mathrm{d}t)[Y'(t+\mathrm{d}t)-c(t)\mathrm{d}t\hat{X}(t)]\end{aligned}$$

其中 $$h(t+\mathrm{d}t)=\frac{(X(t+\mathrm{d}t),Z(t+\mathrm{d}t))}{(Z(t+\mathrm{d}t),Z(t+\mathrm{d}t))}$$

而
$$\begin{aligned}&(X(t+\mathrm{d}t),Z(t+\mathrm{d}t))\\&=(X(t+\mathrm{d}t),Y'(t+\mathrm{d}t)-\overline{Y'(t+\mathrm{d}t)})\\&\approx((a(t)\mathrm{d}t+1)X(t)+b(t)W'(t),c(t)\mathrm{d}t(X(t)-\hat{X}(t))+\mathrm{d}(t)V'(t))\\&\approx(a(t)\mathrm{d}t+1)(c(t)\mathrm{d}t\cdot\sigma(t)\\&\approx c(t)\sigma(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(Z(t+\mathrm{d}t),Z(t+\mathrm{d}t))\\
&\approx (c(t)\mathrm{d}t(X(t)-\hat{X}(t))+\mathrm{d}(t)V'(t),c(t)\mathrm{d}t(X(t)-\hat{X}(t))+\mathrm{d}(t)V'(t))\\
&\approx (c(t)\mathrm{d}t)^2\sigma(t)+d^2(t)(V'(t),V'(t))\\
&\approx d^2(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

故
$$h(t+\mathrm{d}t)\approx\frac{c(t)\sigma(t)\mathrm{d}t}{d^2(t)\mathrm{d}t}=\frac{c(t)\sigma(t)}{d^2(t)}$$

从而
$$\hat{X}(t+\mathrm{d}t)\approx(a(t)\mathrm{d}t+1)\hat{X}(t)+\frac{c(t)\sigma(t)}{d^2(t)}[dY(t)-c(t)\hat{X}(t)\mathrm{d}t]$$

即
$$\mathrm{d}\hat{X}(t)\approx a(t)\hat{X}(t)\mathrm{d}t+\frac{c(t)\sigma(t)}{d^2(t)}[dY(t)-c(t)\hat{X}(t)\mathrm{d}t]$$

另外，因为
$$
\begin{aligned}
&X(t+\mathrm{d}t)-\hat{X}(t+\mathrm{d}t)\\
&\quad\approx(a(t)\mathrm{d}t+1)X(t)+b(t)W'(t)-\{[a(t)\mathrm{d}t+1)\hat{X}(t)]\\
&\qquad+h(t+\mathrm{d}t)[c(t)\mathrm{d}t\cdot[X(t)-\hat{X}(t)]+d(t)V'(t)]\}\\
&\qquad\quad\approx[a(t)\mathrm{d}t+1-h(t+\mathrm{d}t)c(t)\mathrm{d}t](X(t)\\
&\qquad\quad-X'(t))+b(t)W'(t)-h(t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}(t)V'(t)
\end{aligned}
$$

则有
$$
\begin{aligned}
&\sigma(t+\mathrm{d}t)\\
&\equiv(X(t+\mathrm{d}t)-\hat{X}(t+\mathrm{d}t),\ X(t+\mathrm{d}t)-\hat{X}(t+\mathrm{d}t))\\
&\approx[a(t)\mathrm{d}t+1-h(t+\mathrm{d}t)c(t)\mathrm{d}t]^2\sigma(t)+b^2(t)\mathrm{d}t+h^2(t+\mathrm{d}t)d^2(t)\mathrm{d}t\\
&\approx\sigma(t)+2a(t)\mathrm{d}t\sigma(t)-2h(t+\mathrm{d}t)c(t)\mathrm{d}t+b^2(t)\mathrm{d}t+h^2(t+\mathrm{d}t)d^2(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

故
$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\\
&=\frac{\sigma(t+\mathrm{d}t)-\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\\
&\approx 2a(t)\sigma(t)+[h^2(t+\mathrm{d}t)d^2(t)-2h(t+\mathrm{d}t)c(t)\sigma(t)]+b^2(t)\\
&\approx 2a(t)\sigma(t)+\left\{\left[\frac{c(t)\sigma(t)}{d^2(t)}\right]d^2(t)-2\frac{c(t)\sigma(t)}{d^2(t)}c(t)\sigma(t)\right\}+b^2(t)\\
&=2a(t)\sigma(t)-\left[\frac{c(t)}{d(t)}\right]^2\sigma^2(t)+b^2(t)
\end{aligned}
$$

作为定理 1 的一个推论，可得到连续时间参数情形的 Kalman 滤波公式。

定理 2 设条件(1)(2)(3)成立，则

$$\mathrm{d}\hat{X}_0(t)=a_0(t)\hat{X}_0(t)\mathrm{d}t+\frac{\sigma_0(t)c_0(t)}{d_0^2(t)}(\mathrm{d}Y_0(t)-c_0(t)\hat{X}_0(t)\mathrm{d}t)$$

$$\sigma'_0(t)=2a_0(t)\sigma_0(t)-\left[\frac{c_0(t)}{d_0(t)}\right]^2\sigma_0^2(t)+b_0^2(t)$$

证明 $\forall\, t\in R_+$，$\hat{X}_0(t)$为 $X_0(t)$关于 $\mathscr{L}_{y_0}(t)$的最佳线性预测，即 $\hat{X}_0(t)\in\mathscr{L}_{y_0}(t)$，且 $\forall\,\xi\in\mathscr{L}_{y_0}(t)$，有

$$\mathrm{E}|X_0(t)-\hat{X}_0(t)|^2 \leqslant \mathrm{E}|X_0(t)-\xi|^2$$

而由$\mathscr{L}_{y_0}(t)$的定义，$\forall\ \xi\in\mathscr{L}_{y_0}(t)$，存在$\xi_n(t)=\sum_{j=1}^{m(n)} d_j^{(n)}Y_0(t_{n_j})$其中$d_j^{(n)}\in R$，$t_{n_j}\in R_+$，$t_{n_j}\leqslant t$，$j=1,\cdots,m(n)$，使

$$\lim_{n\to\partial}\mathrm{E}|\xi_n(t)-\xi|^2=0$$

即$\forall\ n\in{}^*N\backslash N$，${}^*\mathrm{E}|{}^*\xi_n(t)-{}^*\xi|^2\approx 0$.

令　$\eta_n(t)=\sum_{j=1}^{m(n)}{}^* d_j^{(n)}Y(t_{n_j})$，则$\eta_n(t)\in\mathscr{L}_y(t)$，且$\eta_n(t)\approx{}^*\xi_n(t)$，从而$\forall\ t\in R_+$，有，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|X_0(t)-{}^\circ(\hat{X}(t))|^2 &= {}^\circ({}^*\mathrm{E}|{}^*X_0(t)-\hat{X}(t)|^2)\\ &\leqslant {}^\circ({}^*\mathrm{E}|X(t)-\eta_n(t)|^2) \qquad (\forall\ n\in{}^*N、N)\\ &= {}^\circ({}^*\mathrm{E}|X(t)-{}^*\xi_n(t)|^2)={}^\circ({}^*\mathrm{E}|{}^*X_0(t)-{}^*\xi|^2)=E|X_0(t)-\xi|^2\end{aligned}$$

由文[1]知，最佳线性预测在均方意义下唯一，故$\mathrm{E}|\hat{X}_0(t)-{}^\circ(\hat{X}_0(t))|^2=0$。另一方面$\sigma_0(t)\equiv\mathrm{E}|X_0(t)-\hat{X}_0(t)|^2={}^\circ({}^*E|{}^*X_0(t)-\hat{X}(t)|^2)={}^\circ({}^*E|X(t)-\hat{X}(t)|^2)={}^\circ\sigma(t)$，从而由定理1知：$\forall\ t\in R_+$

$$\mathrm{E}|\hat{X}_0(t)-\hat{X}_0(0)-\int_0^t a_0(t)\hat{X}_0(t)\mathrm{d}t-\int_0^t\frac{\sigma_0(t)c_0(t)}{d_0^2(t)}(dY_0(t)-c_0(t)\hat{X}_0(t)\mathrm{d}t)|^2$$

$$={}^\circ[{}^*\mathrm{E}|\hat{X}(t)-\hat{X}(0)-\int_0^t a(t)\hat{X}(t)\mathrm{d}t-\int_0^t\frac{\sigma(t)c(t)}{d(t)}(dY(t)-c(t)\hat{X}(t)\mathrm{d}t)|^2$$

$$=0$$

即

$$\mathrm{d}\hat{X}_0(t)=a_0(t)\hat{X}_0(t)\mathrm{d}t+\frac{\sigma_0(t)c_0(t)}{d_0^2(t)}(dY_0(t)-c_0(t)\hat{X}_0(t)\mathrm{d}t)$$

同理，由定理1及$\sigma_0(t)={}^\circ\sigma(t)$，可得

$$\sigma'_0(t)=2a_0(t)\sigma_0(t)-\left[\frac{c_0(t)}{d_0(t)}\right]^2\sigma_0^2(t)+b_0^2(t)$$

参考文献

1　何声武. 随机过程导论. 上海：华东师范大学出版社，1989

2　金治明. 非标准分析导论. 国防科技大学研究生教材，1991

3　Edward Nelson. Radically elementary probabilty. Princeton university press，1987