

## 再入弹道参数自适应估计\*

蔡 洪

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

**摘 要** 本文研究再入弹道参数的自适应估计。所采用的方法对动力学模型噪声的未知统计特性进行补偿,并对状态参数与测量设备的系统误差交叉进行估计。仿真结果表明,无论是状态参数的估计还是测量系统误差的估计,都具有较高的精度。

**关键词** 再入弹道, 自适应, 参数估计, 滤波

**分类号** V249.1

## Adaptive Estimation of Reentry Trajectory Parameters

Cai Hong

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In this paper, an adaptive estimator of reentry trajectory parameters is proposed. The method can compensate for the unknown statistic characteristics of the dynamic noise. And it can give adaptive estimation of both state parameters of the trajectory and systematic errors of the measuring equipments in an interactive way. The simulation result indicates that the adaptive estimator has high precision.

**Key words** reentry trajectory, adaptive estimator, parameter estimation, filtering

基于再入飞行试验测量数据对再入弹道参数进行估计,属于典型的过程估计问题。工程应用中,影响估计精度的因素主要有二:一是动力学模型中加速度的干扰;二是测量设备系统性的误差。本文研究针对这两方面因素的自适应滤波方法。

### 1 再入动力学模型

在发射坐标系中,忽略牵连力和哥氏力的影响,再入动力学方程可表示为如下离散

\* 1995年3月18日收稿

形式:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_{xk}T + \frac{1}{2}a_{xk}T^2 \\ y_{k+1} = y_k + v_{yk}T + \frac{1}{2}a_{yk}T^2 \\ z_{k+1} = z_k + v_{zk}T + \frac{1}{2}a_{zk}T^2 \\ v_{x,k+1} = v_{xk} + a_{xk}T \\ v_{y,k+1} = v_{yk} + a_{yk}T \\ v_{z,k+1} = v_{zk} + a_{zk}T \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x, y, z$  表示位置;  $v_x, v_y, v_z$  表示速度;  $a_x, a_y, a_z$  表示加速度;  $T$  为离散周期; 下标“ $k$ ”表示第  $k$  个离散时刻。加速度可以由如下函数表示,

$$\begin{cases} a_x = -\frac{g_0}{2\beta}\rho V v_x - g_x + W_x \\ a_y = -\frac{g_0}{2\beta}\rho V v_y - g_y + W_y \\ a_z = -\frac{g_0}{2\beta}\rho V v_z - g_z + W_z \end{cases} \quad (2)$$

式中  $g_0$  为重量对质量的转换系数;  $\beta$  为弹道系数;  $\rho$  为空气密度, 是位置的函数, 即  $\rho = \rho(x, y, z)$ ;  $V$  为速度值,  $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ;  $g_x, g_y, g_z$  为重力加速度分量, 亦为位置的函数;  $W_x, W_y, W_z$  为加速度随机干扰。弹道系数  $\beta$  定义为

$$\beta \equiv \frac{G}{C_D S} \quad (3)$$

其中  $G$  为再入飞行器的重量;  $C_D$  为再入飞行器的阻力系数;  $S$  为再入飞行器的有效横截面积。

将动力学方程写成向量形式为

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k + B\eta_k \quad (4)$$

## 2 测量模型

本文考虑雷达与经纬仪两种测量设备。

对于雷达, 测量元素为斜距  $R$ , 高低角  $E$ , 方位角  $A$ 。设测量随机误差为  $r, e, a$ , 系统误差分别为  $S_r, S_e, S_a$ , 则雷达测量方程可表示为

$$\begin{cases} R = R_0 + S_r + r \\ E = E_0 + S_e + e \\ A = A_0 + S_a + a \end{cases} \quad (5)$$

其中  $R_0, E_0, A_0$  分别为被测量的真值。记  $X_c \equiv (x_c \ y_c \ z_c)^T$ ,  $X_c$  与飞行器在发射直角坐标系中的位置  $X_F = (x \ y \ z)^T$  具有如下关系:

$$X_c = \Phi(X_F - X_P) \quad (6)$$

其中,  $X_P$  为测量站址在发射坐标系中的坐标,  $\Phi$  为坐标变换矩阵, 于是

$$\begin{cases} R_0 = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} = \sqrt{X_c^T X_c} \\ E_0 = \sin^{-1} \frac{y_c}{R_0} = \sin^{-1} \frac{y_c}{\sqrt{X_c^T X_c}} \\ A_0 = \text{ATAN}(z_c, x_c) \end{cases} \quad (7)$$

上式中函数 ATAN 定义如下:

$$\text{ATAN}(a, b) = \begin{cases} \text{tg}^{-1} \frac{a}{b} & b > 0 \\ \pi + \text{tg}^{-1} \frac{a}{b} & b < 0, a \geq 0; \\ -\pi + \text{tg}^{-1} \frac{a}{b} & b < 0, a < 0 \end{cases} \quad (8)$$

于是测量模型可用向量形式表示为

$$Z = F(X_F) + b + \varepsilon \quad (9)$$

其中  $Z = (R \ E \ A)^T$ ,  $b = (S_r \ S_e \ S_a)^T$ ,  $\varepsilon = (r \ e \ a)^T$

而  $F(X_F) = (R_0 \ E_0 \ A_0)^T$  由 (7)、(6) 而得。

对于经纬仪, 测量元素只有高低角  $E$  和方位角  $A$ , 其测量模型的表示在 (9) 式中去掉关于  $R$  的分量。

### 3 飞行状态及测量系统误差的自适应估计

再入飞行的动力学模型与测量模型综合如下:

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + BU(X_k) + B\eta_k & (10a) \\ Z_k^{(i)} = H^{(i)}(X_k) + b_k^{(i)} + \varepsilon_k^{(i)} & (10b) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

上式中上标“ $i$ ”表示第  $i$  台测量设备;  $n$  为同时进行测量的测量设备台数。关于模型 (10), 有

i)  $A$ 、 $B$  为常系数矩阵;

ii) (10b) 同于 (9) 式, 其中

$$H^{(i)}(X_k) = F(X_{Fk}), \quad X_{Fk} = (I : O)X_k;$$

iii)  $\{\eta_k\}$  与  $\{\varepsilon_k^{(i)}\}$  为互不相关的零均值白噪声序列,  $\text{Var}[\varepsilon_k^{(i)}] = R_k^{(i)}$  已知,  $\text{Var}[\eta_k] = Q_k = \sigma^2 I$  未知,  $b_k^{(i)}$  为常量或随  $k$  缓慢变化。

(10a) 中  $U(X_k)$  为  $X_k$  的非线性函数, 因此 (10a) 为非线性的状态方程。在进行状态估计时, 为了处理的方便, 将  $U(X_k)$  看成是状态方程的输入项,  $U(X_k)$  中未知的  $X_k$  用  $k$  时刻的状态估计  $\hat{X}_{k/k}$  代替,  $\sigma^2, b_k^{(i)}$  未知, 我们对其进行自适应估计, 记

$$r_j^{(i)} = Z_j^{(i)} - H^{(i)}(\hat{X}_{j/j-1}) \quad (11)$$

则

$$E[r_j^{(i)}] = H^{(i)}(X_j) + b^{(i)} - E[H^{(i)}(\hat{X}_{j/j-1})]$$

近似地有

$$b^{(i)} = E[r_j^{(i)}] \quad (12)$$

则可取  $b_{k+1}^{(i)}$  的估计为

$$\hat{b}_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} r_j^{(i)} \quad (13)$$

将(13)式表示为递推的形式为

$$\hat{b}_{k+1}^{(i)} = \frac{k}{k+1} \hat{b}_k^{(i)} + \frac{1}{k+1} r_{k+1}^{(i)} \quad (14)$$

另外,为获得  $\sigma^2$  的估计,记

$$q_j = \dot{X}_{j/j} - \dot{X}_{j/j-1} \quad (15)$$

经过计算可得

$$E[q_j^T q_j] = \text{tr}[AP_{j-1/j-1}A^T - P_{j/j}] + \sigma^2 \left( \frac{3}{4}T^4 + 3T^2 \right) \quad (16)$$

其中  $P$  表示估计的方差,于是可取  $\sigma^2$  的估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\alpha k} \sum_{j=1}^k [q_j^T q_j - \text{tr}(AP_{j-1/j-1}A^T - P_{j/j})] \quad (17)$$

其中  $\alpha = \frac{3}{4}T^4 + 3T^2$ 。将(17)式写成递推形式为

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{k-1}{k} \hat{\sigma}_{k-1}^2 + \frac{1}{\alpha k} [q_k^T q_k - \text{tr}(AP_{k-1/k-1}A^T - P_{k/k})] \quad (18)$$

从而,有如下自适应滤波算法:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_{k+1/k+1} = \dot{X}_{k+1/k} + \sum_{i=1}^n G_{k+1}^{(i)} [Z_{k+1}^{(i)} - H^{(i)}(\dot{X}_{k+1/k}) - \hat{b}_{k+1}^{(i)}] \quad (19a) \\ \dot{X}_{k+1/k} = A\dot{X}_{k/k} + B \cdot U(\dot{X}_{k/k}) \quad (19b) \\ P_{k+1/k} = AP_{k/k}A^T + \hat{\sigma}_k^2 BB^T \quad (19c) \\ P_{k+1/k+1} = [P_{k+1/k}^{-1} + \sum_{i=1}^n (J_{k+1}^{(i)})^T (R_{k+1}^{(i)})^{-1} J_{k+1}^{(i)}]^{-1} \quad (19d) \\ G_{k+1}^{(i)} = P_{k+1/k+1} (J_{k+1}^{(i)})^T (R_{k+1}^{(i)})^{-1} \quad (19e) \\ \hat{b}_{k+1}^{(i)} = \frac{k}{k+1} \hat{b}_k^{(i)} + \frac{1}{k+1} [Z_{k+1}^{(i)} - H^{(i)}(X_{k+1/k})] \quad (19f) \\ q_{k+1} = \dot{X}_{k+1/k+1} - \dot{X}_{k+1/k} \quad (19g) \\ d_{k+1} = \frac{k}{k+1} \hat{\sigma}_k^2 + \frac{1}{\alpha(k+1)} [q_{k+1}^T q_{k+1} - \text{tr}(AP_{k/k}A^T - P_{k+1/k+1})] \quad (19h) \\ \hat{\sigma}_{k+1}^2 = \max(0, d_{k+1}) \quad (19i) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

上式中  $\alpha = \frac{3}{4}T^4 + 3T^2$ , (19i)是为了在计算中避免  $\hat{\sigma}_{k+1}^2$  出现负值。

按(19)式进行递推计算,可取  $\hat{\sigma}_0^2 = 0, \hat{b}_0^{(i)} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。 $\dot{X}_{0/o}$  与  $P_{0/o}$  可以由自由飞行段末段数据处理的结果给出,或者采用再入段数据平滑而获得。

#### 4 仿真计算结果

本文的方法是以某型号导弹飞行试验为背景的。现给出某一飞行弧段(共 17 秒)的仿

表 1 测量设备及跟踪弧段

设 备	起始跟踪时间(s)	跟踪结束时间(s)
雷达 1 <sup>#</sup>	0	6
经纬仪 1 <sup>#</sup>	0	17
雷达 2 <sup>#</sup>	0	6
经纬仪 2 <sup>#</sup>	0	17
经纬仪 3 <sup>#</sup>	0	17
经纬仪 3 <sup>#</sup>	0	17
经纬仪 4 <sup>#</sup>	0	17

真结果。参与的测量设备如表 1。测量设备的站址是已知的,测量随机误差标准差指标为:雷达: $\sigma_r=5\text{ m}, \sigma_a=5''$ ;经纬仪: $\sigma_r=\sigma_a=5''$ 。测量设备的系统误差是未知的常数,仿真时取的数值为:雷达: $S_r=20\text{ m}, S_a=50''$ ;经纬仪: $S_r=S_a=20''$

动力学方程中,弹道系数  $\beta$  为已知。轨道模拟时,加速度各个分量在每个离散点均含有均值为零,标准差为  $\sigma=0.5\text{ m/s}^2$  的随机干扰。

加速度随机干扰以及测量随机误差均以正态伪随机数的方式产生。

根据模拟的测量数据对飞行状态参数以及测量系统误差进行估计。为计算结果的直观起见,绘出测量系统误差的动态估计图以及状态估计与参考值的偏差图(本文只给出部分图,见图 1, 2, 3, 4)。状态估计的精度,用偏差的均方根值来描述。设有序列  $\{d_i\}, i=1, 2, \dots,$

$N$ , 其均方根为  $\sigma=\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2}$ 。根据状态估计偏差数据统计的估值精度为

位置: $\sigma_x=0.52\text{ m}, \sigma_y=1.41\text{ m}, \sigma_z=0.38\text{ m}$ ,

速度: $\sigma_{v_x}=0.27\text{ m/s}, \sigma_{v_y}=0.36\text{ m/s}, \sigma_{v_z}=0.29\text{ m/s}$ 。

从系统误差的动态估计图来看,各设备的系统误差估计在几秒之后基本稳定在真值

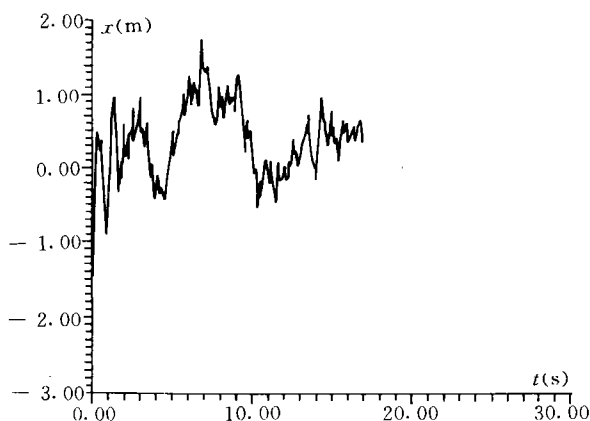


图 1  $x$  方向位置估计偏差( $\sigma_x=0.52\text{m}$ )

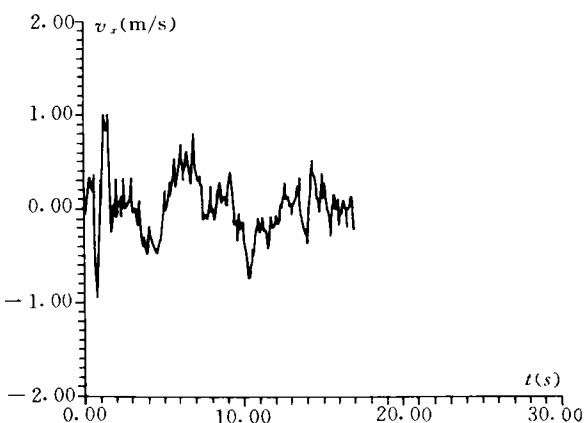


图 2  $x$  方向速度估计偏差( $\sigma_{v_x}=0.27\text{m/s}$ )

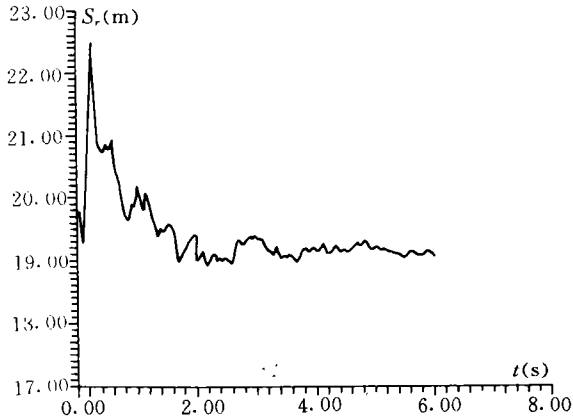


图3 雷达1#斜距R的系统误差估计

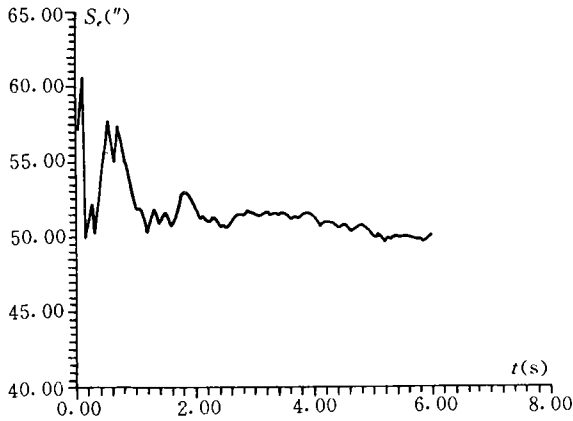


图4 雷达2#高低角E的系统误差估计

的附近。由此看来,这种状态估计与测量设备系统误差估计交互进行、互相补偿的方法,在数据处理过程中效果是明显的。

### 参考文献

- 1 张金槐,蔡洪.飞行器试验统计学.长沙:国防科大出版社,1995.
- 2 Austin J W & Leondes C T. Statistically Linearized Estimation of Reentry Trajectories, IEEE, Vol. AES-17, No. 1, January 1981.
- 3 章燕申等.最优估计与工程应用.北京:宇航出版社,1991.

(责任编辑 石少平)