

C^2 有理插值样条曲线曲面*

方 遼 朱国庆

(国防科学技术大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 首先提出一组基函数向量,它具有以下特定的性质:

$$BB(0)^T = (0.0, 1.0, 0.0, 0.0), \quad BB(1)^T = (0.0, 0.0, 1.0, 0.0)$$

$$BB'(0)^T = (-0.5, 0.0, 0.5, 0.0), \quad BB'(1)^T = (0.0, -0.5, 0.0, 0.5)$$

$$BB''(0)^T = (1.0, -2.0, 1.0, 0.0), \quad BB''(1)^T = (0.0, 1.0, -2.0, 1.0)$$

进而研究了以此函数向量的张量积形式定义的有理样条曲面,并得以下结论:(1)插值性;(2) C^2 连续性;(3)局部性和可调性。文中还分析了“权”的作用,并指出它与三次 B-样条的类似性。

关键词 有理样条曲线,有理样条曲面,插值曲线曲面

分类号 O241.3

C^2 Rational Biquitric Interpolation Surface

Fang Kui Zhu Guoqing

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract We first present a vector of function basis $BB(t)$ that satisfied

$$BB(0)^T = (0.0, 1.0, 0.0, 0.0), \quad BB(1)^T = (0.0, 0.0, 1.0, 0.0)$$

$$BB'(0)^T = (-0.5, 0.0, 0.5, 0.0), \quad BB'(1)^T = (0.0, -0.5, 0.0, 0.5)$$

$$BB''(0)^T = (1.0, -2.0, 1.0, 0.0), \quad BB''(1)^T = (0.0, 1.0, -2.0, 1.0)$$

Secondly we discuss the rational surface defined in tension-product form using above function vector $BB(t)$. The interpolation surface implies the following results: (1) The surface interpolates control points; (2) It is second order parametrically continuous; (3) It is local and can be adjusted by weights. The effect of weights is also analysed and has similar result as bicubic rational B-spline surface.

Key words rational spline curve, rational spline surface, interpolation curve surface

* CAD/CG 国家重点实验室资助项目
1996 年 1 月 9 日收稿

参数曲线曲面方法是 CAGD 研究的主题之一，通常采用的方法包括 Bézier 方法、B-样条方法、Beta 样方法、Coons 方法以及已逐渐成为标准的非均匀有理 B-样条 (NURBS) 方法。对这些方法，理论上已经有深入的研究和探讨^[1-7]，并且得到了充分的应用。然而，在自由曲线曲面设计中一直存在着一对矛盾：连续性和插值性。最普遍采用的 Bezier 方法和 B-样条方法各具特点，Bezier 方法具有插值性而光滑拼接条件苛刻，B-样条方法光滑性好而插值困难，NURBS 方法具有许多优点，但其插值方法仍是一个有待研究的问题。基于上述观点，方遼^[8]等曾分析 B-样条光滑性的本质，利用 Bezier 方法的插值性，构造了一种 C^2 五次参数插值样条曲线曲面，它们具有局部性和形状可调性，并且曲线具有保形性（为了便于叙述，暂称之为 BB 样条插值曲线曲面），从而实现了光滑性和插值性的统一。

本文引入有理插值样条曲线曲面，以插值点的权代替形状调整参数，尽管失去了几何直观性，却具有确定的形状调整功能，并且避免了 BB 样条曲线曲面形状调整参数的不足（曲线曲面参数有一定的相关性）。有理 BB 样条曲线曲面有着与三次有理 B-样条曲线曲面相似的性质： C^2 连续的，局部的，可调的。

1 参数取 1.0 时的 BB 样条基函数

为了能够使定义的曲线曲面形状可调，本文引入了形状参数。现在把此种参数的功能转给有理样条的“权”，而把可调参数取为 1.0，得到基函数

$$BB(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 & 1.5 & -2.5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -4.5 & 7.5 & -3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 4.5 & -7.5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 & 2.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix}$$

$BB(t)$ 具有和 1 性，其 4 个多项式函数（在 $[0, 1]$ 上）并非恒正，然而由于具有良好的特性，所以并不影响应用，图 1 为它们的函数图像。

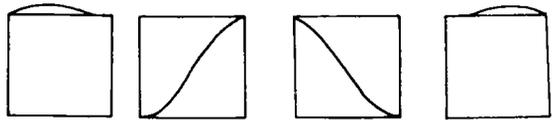


图 1 参数为 1 的 BB 样条基函数

很容易验证 BB 样条的基函数 $BB(t)$ 满足

$$\begin{aligned} BB(0)^T &= (0.0, 1.0, 0.0, 0.0), & BB(1)^T &= (0.0, 0.0, 1.0, 0.0) \\ BB'(0)^T &= (0.5, 0.0, 0.5, 0.0), & BB'(1)^T &= (0.0, -0.5, 0.0, 0.5) \\ BB''(0)^T &= (1.0, -2.0, 1.0, 0.0), & BB''(1)^T &= (0.0, 1.0, -2.0, 1.0) \end{aligned}$$

2 有理 BB 样条曲线

给出控制点 P_0, P_1, P_2, P_3 及其相应各点的权 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ ，定义如下 $RP(t)$ 函数：

$$RP(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 \omega_i P_i BB_i(t)}{\sum_{i=0}^3 \omega_i BB_i(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

为五次有理 BB 样条曲线段。

对于点列 $(P_i)_{i=0}^{n+1}$ 及其相应的权 $(\omega_i)_{i=0}^{n+1}$ ，五次有理 BB 样条曲线由下列曲线段组成：

$$RP_i(t) = \frac{\sum_{j=0}^3 \omega_{i+j} P_{i+j} BB_j(t)}{\sum_{j=0}^3 \omega_{i+j} BB_j(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1, i = 0, 1, \dots, n-2)$$

容易验证 $RP_i(t)$ 有以下性质：

- (1) 插值性；
- (2) C^2 连续性；
- (3) 可调性和局部性。

如果我们将有理 BB 样条曲线曲面视为仿射坐标系下的 BB 样条插值曲线曲面，即关于点列 $((\omega_i P_i, \omega_i))_{i=0}^{n+1}$ 的 BB 样条插值曲线曲面，利用 BB 样条的性质则可非常合理地得到上述结果。由于曲线可以视为曲面的特例，所以将之放在曲面部分证明。

权 ω_i 对图形的影响见图 2。图 3 显示了有理 BB 样条的应用结果。

3 有理 BB 样条曲面

给出网格 $(P_{i,j})$ 及其权 $(\omega_{i,j})$ ($i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3$)，定义

$$RP(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{i,j} P_{i,j} BB_i(u) BB_j(v)}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{i,j} BB_i(u) BB_j(v)}, \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

为有理 BB 样条曲面片，对拓扑网格 $(P_{i,j})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n+1; j = 0, 1, 2, \dots, m+1$) 及其权 $(\omega_{i,j})$ ，双五次有理 BB 样条曲线由下列曲面片组成：

$$RP_{k,l}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{k+i, l+j} P_{k+i, l+j} BB_i(u) BB_j(v)}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{k+i, l+j} BB_i(u) BB_j(v)}$$

$$(0 \leq u \leq l, 0 \leq v \leq l; k = 0, 1, \dots, n-2; l = 0, 1, \dots, m-2)$$

我们可以将之写为矩阵形式

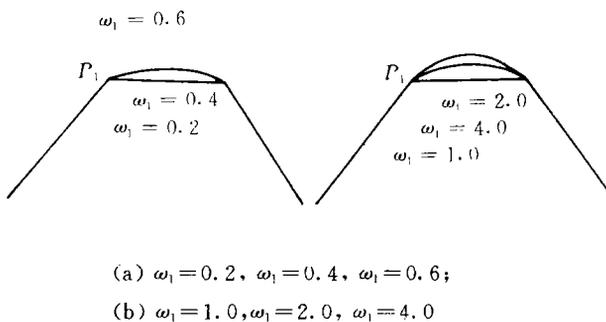
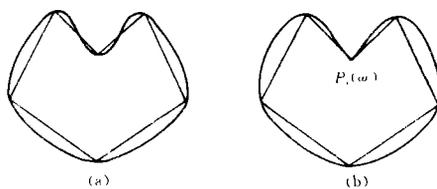


图 2 有理 BB 样条曲线段



(a) BB 样条曲线；
(b) $\omega_i = 0.6$ 有理 BB 样条曲线
图 3 有理 BB 样条曲线

$$RP_{k,l}(u,v) = \frac{BB(u)^T * RPP_{k,1} * BB(v)}{BB(u)^T * W_{k,1} * BB(v)}$$

其中, $RPP_{m,n}$ 是 4 阶方阵 $(w_{i,j}, P_{i,j})$ ($i=m, m+1, m+2, m+3; j=n, n+1, n+2, n+3$), $W_{i,j}$ 是 4 阶方阵 $(w_{i,j})$ ($i=m, m+1, m+2, m+3; j=n, n+1, n+2, n+3$)。这里将证明曲面具有以下性质:

- (1) 插值性;
- (2) C^2 连续性;
- (3) 可调性和局部性。

证明 (1) 插值性, 由 $BB(u)$ 的端点性质, 容易验证

$$RP_{k,l}(0,0) = P_{k+1,l+1}, \quad RP_{k,l}(0,1) = P_{k+1,l+2},$$

$$RP_{k,l}(1,0) = P_{k+2,l+1}, \quad RP_{k,l}(1,1) = P_{k+2,l+2},$$

(2) 连续性, $RP_{k,l}(u,v)$ 和 $RP_{k,l+1}(u,v)$ 在 v 向 C^2 连续。令

$$F_l(u,v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{k+i,l+j} P_{k+i,l+j} BB_i(u) BB_j(v) = BB(u) * WP_{k,l} * BB(v)$$

和

$$G_l(u,v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{k+i,l+j} BB_i(u) BB_j(v) = BB(u) * W_{k,l} * BB(v)$$

其中两个矩阵为

$$WP_{k,l} = (\omega_{i,j}, P_{i,j}) \quad (i = k, k+1, k+2, k+3; j = l, l+1, l+2, l+3)$$

$$W_{k,l} = (\omega_{i,j}) \quad (i = k, k+1, k+2, k+3; j = l, l+1, l+2, l+3)$$

那么有

$$RP_{k,l}(u,v) = \frac{F_l(u,v)}{G_l(u,v)}, \quad RP_{k,l+1}(u,v) = \frac{F_{l+1}(u,v)}{G_{l+1}(u,v)}$$

由于 $F_l(u,v)$ 和 $F_{l+1}(u,v)$ 与相邻的两片 BB 样条曲面的形式相同, $G_l(u,v)$, $G_{l+1}(u,v)$ 同样, 首先有

$$F_l(u,1) = F_{l+1}(u,0), \quad G_l(u,1) = G_{l+1}(u,0),$$

$$\frac{\partial F_l(u,1)}{\partial u} = \frac{\partial F_{l+1}(u,0)}{\partial u}, \quad \frac{\partial G_l(u,1)}{\partial u} = \frac{\partial G_{l+1}(u,0)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 F_l(u,1)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F_{l+1}(u,0)}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 G_l(u,1)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 G_{l+1}(u,0)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 F_l(u,1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F_{l+1}(u,0)}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 G_l(u,1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 G_{l+1}(u,0)}{\partial u \partial v}$$

因为 $RP_{k,l}(u,v)$ 是 $F_l(u,v)$, $G_l(u,v)$ 的商, $RP_{k,l+1}(u,v)$ 是 $F_{l+1}(u,v)$, $G_{l+1}(u,v)$ 的商, 则 $RP_{k,l}(u,1)$ 和 $RP_{k,l+1}(u,0)$ 在 v 方向 C^2 连接。同理可以证明有理曲面在 u 向是 C^2 的。

(3) 有理 BB 样条曲面是由若干曲面片组成的, 而每个曲面片只与相邻的 16 点相关, 因此它是局部的; 我们可以通过权调整其形状。

证毕。

4 有理 BB 样条的应用

由前面几节的说明可知, 有理 BB 样条有着良好的性质, 并且通过每点的“权”来控

制曲线曲面的形状,但是它也有不足之处,以下对此进行讨论。

一个显而易见的遗憾是:BB样条基函数不是恒正的,这就可能导致在计算曲线曲面时的数值不稳定,甚至出现奇异点——有理函数的分母为零。然而,分析四个基的 $BB_i(t)$ 函数曲线,我们高兴地发现:(1) $BB_1(t)$ 和 $BB_2(t)$ 恒正, $BB_0(t)$ 和 $BB_3(t)$ 恒负;(2) $(BB_1(t)+BB_2(t))$ 的绝对值远大于 $BB_0(t)+BB_3(t)$ 的绝对值。那么,不难得到这样一个并不苛刻却能满足应用的条件:各相邻控制点的权的差别满足,即

$$\max\left(\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}}, \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}\right) < K$$

这里, $K=2\sqrt{2}$ 。设 $\omega_i(i=0,1,2,3)$ 满足上述条件,则可令 $\omega=\min(\omega_1, \omega_2)$,有 $\omega_0 \leq \omega$ 和 $\omega_3 \leq \omega$ 。现在分析

$$S = \sum_{i=0}^3 \omega_i BB_i(t).$$

由于,在 $[0,1]$ 上,

$$1 \leq \text{abs}(BB_1(t) + BB_2(t)) \leq 9/8$$

$$0 \leq \text{abs}(BB_0(t) + BB_3(t)) \leq 1/8$$

那么

$$S \geq \omega |BB_1(t) + BB_2(t)| - 8\omega |BB_0(t) + BB_3(t)| > \omega - 8\omega \cdot 1/8 = 0$$

由此说明,只要相邻两个控制点的“权”相差不超过8倍,就可得到非奇异的有理BB样条曲线,曲面的情形类似。

另一个有待研究的问题是 有理BB样条可否表示精确圆锥曲线,对此还无定论。

参 考 文 献

- 1 Bohm W. A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD. Computer Aided Geometrical Design, 1984, 1(1): 1~60
- 2 Coons S A. Surface for Computer-aided Design of Space Figure. Mech. Eng. Depart. MIT, 1964
- 3 Barnhill R E. A Survey of the Representation and Design of Surface. IEEE CG & A, 1983, (10): 9~16
- 4 Piegle L. On NURBS: A Survey. IEEE. CG & A, 1991, (1)
- 5 Barsky B A, Greenberg D P. Determining a Set of B-spline Control Vertices to Generate an Interpolating Surface. Computer Graphics and Image Processing. 1980, 14: 203~226
- 6 Wenhui D, Francis J M. On the G^1 continuity of Piecewise Bezier Surfaces: A Review with New Results. Computer Aided Design, 1990, 22(9)
- 7 Fang Kui. Bicubic Interpolating Spline Surfaces. 10th ISPE/IFAC inter. conf. on CAD/CAM, Robotics and Factories of the Future Cars, CANADA, 1994
- 8 Fang Kui, Zhu Guoqing. C^2 Biquintic Interpolation Spline Curve and Surface, The 4th international Conference on CAD/CG, Wuhan, 1995

(责任编辑 卢天既)