

## 小波边界元法\*

任钧国

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 将边界上的函数展成小波级数,利用循环矩阵方法,从核函数边界上的值,得到离散的积分方程系数矩阵,求解未知的小波级数系数,从而得到边界积分方程近似解,文中计算了一个二维拉普拉斯方程的解。

**关键词** 小波级数,边界元,积分方程

**分类号** O39, TB12

## Wavelet Boundary Element Method

Ren Junguo

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** The functions on boundary are expanded into wavelet series, and the coefficient matrices are obtained from the values of kernel functions on the boundary using a circulant matrix method. The approximate solution of boundary integral equation is worked out by solving the unknown wavelet coefficients. An example of 2D Laplace equation is given.

**Key words** wavelet series, boundary element, integral equation

边界元方法最主要的特征是降维,其次是方程精度高,在相同规格规模条件下,所需未知数少。小波是在数学和信息方面发展起来的一种分析工具,离散小波有许多优良的特征,例如正交性,紧支性等,因此它应用于许多方面。Qian 和 Weiss<sup>[1]</sup>给出了偏微分方程小波—— Galerkin 解, Jaffard<sup>[2]</sup>证明了用小波离散的椭圆性方程,对于 Dirichlet, 或 Neumann 问题,条件数更好,使用共轭梯度法求解更快。

### 1 紧支小波简介

为本文的需要,首先简单介绍紧支小波,读者可以参考文献[3,4,5]。紧支小波由

\* 1996年5月20日收稿。

Dauchies 在文[3]中发展的,它的基础是二尺度差分方程:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in Z} a_k(2x - k) \quad (1)$$

其中  $\varphi(x)$  是尺度函数,  $a_k$  为滤波系数,  $Z$  为整数集。对于紧支小波,  $a_k$  只有有限个不为零,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in 0}^{N-1} a_k \varphi(2x - k) \quad (2)$$

与  $\varphi(x)$  正交的小波  $\psi(x)$  定义为

$$\psi(x) = \sum_{k \in 0}^{N-1} a_{1-k} \varphi(2x - k) \quad (3)$$

尺度函数与它的平移函数,组成一个正交集,因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(x+l) dx = \delta_{0l} \quad (4)$$

其中  $\delta_{0l}$  为 Kronecker delta 函数。

尺度函数在规一化条件下,滤波系数有关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k \in 0}^{N-1} a_k = 1 \quad (5)$$

从小波函数的定义可知,  $\psi(x)$  正交于尺度函数  $\varphi(x)$ , 下列关系必须成立。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k \in 0}^{N-1} (-1)^k a_k a_{1-k} = 0 \quad (6)$$

## 2 周期函数的小波展开

考虑区间  $[0, l]$  上周期为  $l$  的函数  $f(x)$ , 即

$$f(0) = f(l) \quad (7)$$

将区间  $[0, l]$  分为  $n$  等分, 每一子区间又分为  $2^m$  等分, 令

$$f_i = f\left(\frac{\Delta l}{2^m}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, M-1) \quad (8)$$

其中  $M = n \cdot 2^m$ ,  $\Delta l = \frac{l}{n}$ 。

假定尺度为  $m$  的小波空间上, 函数  $f(x)$  展开成为:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m \xi - k) \quad (9)$$

其中  $\xi = x/\Delta l$

$c_k$  为  $f(x)$  在小波空间上的系数。方程(8)可记为

$$f_i = \sum_{k=0}^{M-1} c_k 2^{\frac{m}{2}} \varphi(i - k)$$

用矩阵表示为:

$$\begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{Bmatrix} = 2^{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \varphi_1 \\ \varphi_1 & 0 & \cdots & \varphi_2 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{Bmatrix}$$

简记为:

$$\{f\} = [A]\{c\} \quad (10)$$

由于 $[A]$ 是一个循环矩阵, 向量 $\{f\}$ 是小波系数向量 $\{c\}$ 与 $[A]$ 第一列的卷积, 可以用FFT求解 $\{c\}$ <sup>[6]</sup>。本文采用循环矩阵方法<sup>[7]</sup>可以得到 $[A]^{-1}$ 的表示式。定义变换

$$\{c\} = [T]\{\bar{c}\} \quad (11)$$

其逆变换为

$$\{\bar{c}\} = [T^*]\{c\} \quad (12)$$

其中

$$[T] = [T_{ij}] = [e^{ija} \sqrt{-1}], [T^*] = \frac{1}{M}[e^{ija} \sqrt{-1}],$$

$$\left( \alpha = \frac{2\pi}{M}, M = n \cdot 2^m \right)$$

方程(10)两边同乘以 $[T^*]$ , 应用方程(11), 方程右边矩化为对角矩阵, 易得 $\{\bar{c}\}$ , 再应用(11),  $\{c\}$ 可以 $\{f\}$ 表示。 $[A]$ 的逆矩阵求得, 小波系数 $\{c\}$ 可表示为:

$$\{c\} = [A]^{-1}\{f\} \quad (13)$$

对边界积分方程, 核函数经常出现奇点, 上述方法不能直接求得小波系数 $\{c\}$ ; 如果能给出奇点上函数的值, 问题可以解决。不妨假定奇点为 $x=0$ 点,  $f(0) \rightarrow \infty$ 。奇点在其它点, 可类似求得。

求和(10)式, 得

$$\sum_{i=0}^{M-1} f_i = 2^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} c_k \quad (14)$$

又在区间 $[0, l]$ 积分(9)式, 利用小波函数性质有

$$\int_0^l f(x) dx = \frac{\Delta l}{2^{\frac{m}{2}}} \sum_{k=0}^{M-1} c_k \quad (15)$$

比较(14), (15)式得

$$f_0 = \frac{2^m}{\Delta l} \int_0^l f(x) dx = \sum_{k=0}^{M-1} f_k \quad (16)$$

只要积分存在, 就给出了 $f_0$ 的补充定义, 于是 $f(x)$ 的小波系数求得。积分值可以用数值积分求得, 奇异积分仅在 $(0, x_1)$ 和 $[x_{M-1}, x_M)$ 。对于此奇异积分, 下文中得一近似表示式, 效果很好。

### 3 小波边界元

对于有限区域上的线性齐次偏微分方程, 关于边界上未知函数 $u(x)$ 或法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ (或与 $u(x)$ 相关的函数 $p(x)$ )的边界积分方程一般形式为。

$$c(x)u(x) + \oint_{\Gamma} p^*(x, \xi)u(\xi) d\Gamma(\xi) = \oint_{\Gamma} u^*(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} d\Gamma(\xi) \quad (17)$$

其中 $u^*(x, \xi)$ 和 $p^*(x, \xi)$ 是边界上点 $x$ 和观察点 $\xi$ 的函数, 当此两点重合时, 奇异发生。 $u^*(x, \xi)$ 称为基本解,  $p^*(x, \xi)$ 是与基本解相关的函数。

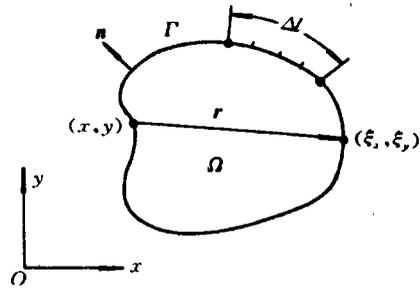
假定边界是光滑的, 分成 $n$ 个弧长为 $\Delta l$ 的区间, 如图1所示。取某点 $A$ 为弧长的度量点, 边界的总弧长为 $l$ , 每区间又分为 $2^m$ 个子区间, 定义 $s=l/\Delta l$ , 边界上的函数 $u^*$

$(x)$ ,  $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$  (或  $p(x)$ ) 展成小波函数。

$$u(x(l)) = \sum_{i=0}^{M-1} c_i 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m s - i)$$

$$p(x(l)) = \sum_{i=0}^{M-1} \bar{c}_i 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m s - i) \quad (M = n \cdot 2^m)$$

(18)



核函数  $u^*$ ,  $p^*$  也展成小波级数。

图1 边界单元的划分

$$u^*(x, \xi) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} G_{ij} 2^m \varphi(2^m s - i) \varphi(2^m \bar{s} - j) \quad (19)$$

$$p^*(x, \xi) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} H_{ij} 2^m \varphi(2^m s - i) \varphi(2^m \bar{s} - j)$$

其中

$$\bar{s} = \bar{l} / \Delta l$$

$$G_{ij} = \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} u^* 2^m \varphi(2^m s - i) \varphi(2^m \bar{s} - j) dl d\bar{l} \quad (20)$$

$$H_{ij} = \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} p^* 2^m \varphi(2^m s - i) \varphi(2^m \bar{s} - j) dl d\bar{l}$$

将(18)、(19)代入方程(17), 两边同乘  $2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m \bar{s} - j)$ , 沿边界积分, 利用(4)式得:

$$\left( \frac{1}{2} [I] + \Delta l [H_{ij}] \right) \{c_j\} = \Delta l [G_{ij}] \{\bar{c}_j\} \quad (21)$$

其中  $[I]$  为单位矩阵。

可以利用多点高斯积分求得  $H_{ij}$  和  $G_{ij}$ , 但数值计算表明, 精度很差。  $u^*$ ,  $p^*$  除奇点外, 在各分点的值已知, 可以利用第二节所述方法求得  $u^*$ ,  $p^*$  的展开式, 系数  $H_{ij}$  和  $G_{ij}$  可求得。根据(19)式  $G_{ij}$  和  $H_{ij}$  的  $2n^2$  个值与边界上  $u^*$  和  $p^*$  的  $2n^2$  个值有关系:

$$\{G_{ij}\} = [A]^{-1} \otimes [A]^{-1} \{u_{ij}^*\} \quad (22)$$

$$\{H_{ij}\} = [A]^{-1} \otimes [A]^{-1} \{p_{ij}^*\}$$

其中符号  $\otimes$  表示直接乘, 向量  $\{G_{ij}\}$  为  $n^2$  个值组成的向量:

$$\{G_{ij}\} = [ \{\bar{G}\}_{0j} \}^T \{ \bar{G}\}_{1j} \}^T \dots \{ \bar{G}\}_{M-1j} \}^T ]^T \quad (23)$$

$\{\bar{G}\}_{ij} \}^T$  为

$$\{\bar{G}\}_{ij} \}^T = [G_{i0}, G_{i1}, \dots, G_{iM-1}]$$

$\{H_{ij}\}$ ,  $\{u_{ij}^*\}$ ,  $\{p_{ij}^*\}$  类似于(23)式。

对于 Neumann 或 Dirichlet 问题,  $p(x)$  或  $u(x)$  给定边界上的值, 于是向量  $\{\bar{c}_i\}$  或  $\{c_i\}$  由(13)式给出, 那么另一向量满足方程(21), 用高斯消元法或其它方法求得。一旦边界上的  $u(x)$  和  $p(x)$  已知, 域内任一点  $x$  上的  $u(x)$ , 可用它们的边界积分表示:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} u^* [(x, \xi) p^*(\xi) - p^*(x, \xi) u^*(\xi)] dl \quad (24)$$

直接用数值积分求上式, 精度不高。利用(13)式, 上式可表示为:

$$u(x) = \frac{\Delta l}{2\pi} (\{c_i^*\}^T \{c_i\} - \{\bar{c}_i^*\}^T \{\bar{c}_i\}) \quad (25)$$

#### 4 拉普拉斯方程小波边界元法及算例

用二维拉普拉斯方程说明上节发展的方法,许多物理问题都可以用拉普拉斯方程表示

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{域内} \quad (26)$$

边界上  $u = \bar{u}$  Dirichlet 问题

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \quad \text{Neumann 问题}$$

基本解法  $u^*(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (27)$

其中  $r = |r| = \sqrt{(\xi_x - x)^2 + (\xi_y - y)^2}$

$p^*(x, \xi)$  为  $\frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n_\xi} \quad (28)$

边界划分如图 1.  $u^*, p^*$  在  $x_i \neq \xi_j$  时值确定, 当  $i=j$  时奇异发生. 对于  $\frac{\partial u^*}{\partial n_\xi}$ , 当  $\xi \rightarrow x$  时有

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\partial u^*}{\partial n_\xi} = 0 \quad (29)$$

因此, 可以用第二节中关于奇异函数展开方法, 求得小波系数. 然而对于  $u^*(x, \xi)$ , 无法得到类似(29)的补充定义, 但可用奇异函数的展开方法. 若奇点在  $s=0$ , 则奇异区间为  $(s_0, s_1]$ , 和  $[s_{n-1}, s)$ , 针对拉普拉斯方程, 奇异积分值可用弧长近似表示为

$$\int_{s_0}^{s_1} u^*(x, \xi) ds = -\frac{1}{4\pi} \int_{s_0}^{s_1} \ln r^2 ds \approx -\frac{a}{4\pi} \left\{ \ln \left[ \left( \frac{a^2}{4R^2} \right) a^2 \right] - 4 + 2 \frac{\text{tg} \alpha}{\alpha} \right\} \quad (30)$$

其中,  $a = \frac{\Delta l}{2^m}$ ,  $\text{tg} \alpha = \frac{a}{2R}$ ,  $R$  为边界上  $s=0$  点的曲率半径.

用  $D4$  和  $D6$  小波, 计算单位圆内 Neumann 和 Dirichlet 问题.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(1, \theta) = \cos \theta, \quad \bar{u}(1, \theta) = \cos \theta$$

其精确解为:  $u = x$ .

首先将单位圆分为 8 等分, 以后依次加以细分, 计算到 32 等分, 计算如图 2 所示  $A, B, C, D$  四点的  $u(x)$ , 四点的横坐标为 0.5, 纵坐标分别为  $\frac{1}{16}, \frac{1}{8},$

$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ , 其结果列在附表. 对 Neumann 问题, 假定  $u(0, 0) = 0$ .

#### 5 小结

本文研讨了小波级数边界积分方程的求解, 对于系数矩阵的计算采用积分方法, 避免了计算不精确. 计算表明, 小波级数适合于此类问题, 此方法可以推广应用非齐次方

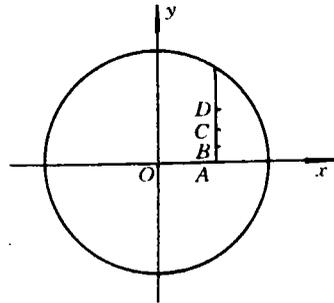


图 2 简单圆域

程的边界元方法和高维问题。

附表 数值解与精确解比较

$n \cdot 2^n$	点	Dirichlet		Neumann		精确值
		$D_4$	$D_6$	$D_4$	$D_6$	
			Circle	Domain		
8	A	0.3895	0.5140	0.3354	0.4481	0.5
	B	0.3854	0.5084	0.3324	0.4437	
	C	0.3781	0.4983	0.3268	0.4357	
	D	0.4303	0.5708	0.3663	0.4927	
16	A	0.4646	0.5080	0.4416	0.4888	0.5
	B	0.4646	0.5080	0.4416	0.4888	
	C	0.4646	0.5080	0.4417	0.4889	
	D	0.4675	0.5112	0.4443	0.4889	
32	A	0.4906	0.5028	0.4834	0.4970	0.5
	B	0.4906	0.5028	0.4834	0.4970	
	C	0.4906	0.5028	0.4834	0.4970	
	D	0.4906	0.5028	0.4834	0.4970	

### 参 考 文 献

- 1 Qian S, Weiss J. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations. J. of computational physics, 1991, 106: 199
- 2 Jaffard S. Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. SIAM J. Numer. Anal., 1992
- 3 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communications on pure and applied mathematics, 1988
- 4 Strang G. Wavelets and dilation equations: a brief introduction. SIAM Review, 1989
- 5 Williams J, Amaratunga K. Introduction to wavelets in engineering. Int. J. Num. Meth. Engng, 1994
- 6 Amaratunga K. Wavelets-Galerkin solution for one-dimensional partial differential equations. Int. J. Num. Meth. Engng, 1994
- 7 武际可, 邵秀民. 循环矩阵及其在结构计算中的应用. 计算数学, 1979

(责任编辑 石少平)