国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第4期　1996年12月　Vol. 18 No. 4

有限元结构分析神经网络计算*

易晓山　任均国　周建平
（国防科技大学航天技术系　长沙　410073）

摘　要　采用精确积分四边形单元刚度矩阵，构造一种多层反馈神经网络以实现平面问题有限元结构分析，其中间层神经元联接权值为求解问题的单元刚度矩阵。分析和数值仿真结果表明，该神经网络稳定收敛于有限元模型解，为有限元结构分析并行计算提供一种新的方法。

关键词　神经网络，有限元，结构分析
分类号　O39

Structure Analysis By Neural Network

Yi Xiaoshan　Ren Junguo　Zhou Jianping
(Department of Astronautics Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　A feedback multi-layer neural network model is proposed for the structural analysis. The weight coefficients of middle-layer neural cells of the stiffness matrix given by finite element method using an exact integrated 4 node element. Numerical simulation shows that the method is consistent with FEM. This method presents a new way for the parallel structural analysis.

Key words　neural network, finite element method, structure analysis

超高速并行计算是有限元发展的重要方向。80年代，人工神经网络的研究取得突破性进展，其计算并行性、存储分布性、高度互联性为解决大规模问题的高速计算提供了崭新而充满潜力的途径。在有限元数值计算领域，Takeuchi[1]构造了一种线性网络模拟有限元分析过程，并实现了一维电场泊松方程有限元计算的神经网络数值模拟。该神经网络结构简单，难以处理复杂有限元模型。本文采用精确积分四边形单元结合多层反馈神

* 国家自然科学基金、国家教委优秀青年教师基金和校预研基金资助
1996年6月17日收稿

经网络，实现了平面问题有限元模型结构分析计算。

1 结构分析有限元模型

以平面四结点单元为例，如图 1 所示，根据有限元思想将所研究的结构区域进行单元划分。通过选取合适的插值函数 N 和结点位移 U，系统的总势能可以表达为

$$\Pi=\frac{1}{2}U^{T}\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial U_i^e}{\partial U}\right)\cdot K_i^e\left(\frac{\partial U_i^e}{\partial U}\right)^{T}\right]U-U^{T}f \tag{1}$$

其中 m 为单元总数，K 和 f 表示刚度矩阵和结点载荷矢量。

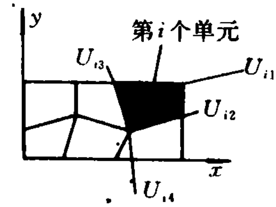

图 1 一个平面四结点单元有限元模型

椭圆方程势能泛函是正定型的，引入边界条件后，全局存在唯一极小点。驻极点条件为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U}=\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial U_i^e}{\partial U}\right)K_i^e\left(\frac{\partial U_i^e}{\partial U}\right)\right]U-f=0 \tag{2}$$

满足方程 (2) 的解 U^* 即是所要求的解。对于适定物理问题，其边界条件包括 Dirichlet 边界 S_1 和 Neumann 边界 S_2：

$$S_1:\quad u=u_u,\quad f=f_g;\qquad 和\ S_2:\quad u=u_g,\quad f=f_u \tag{3}$$

下标 u 和下标 g 分别代表未知量和给定量。将边界条件处理加到结点上，未知结点位移 U_{ju} 和未知结点力 f_{ju} 的总数目与方程 (3) 数目一致，因此，引入边界条件可以求出方程 (3) 的解。采用非线性优化算法，目标函数为系统势能 Π，边界条件作为约束条件处理，迭代算法构造如下：

$$(U_j)_{new}=U_j-\alpha_j\frac{\partial \Pi}{\partial U_j} \tag{4}$$

约束条件进行如下处理，U_{jg} 参予 (4) 右边计算，但不迭代更新，保持不变，因此这些点的未知结点力 f_{ju} 对于迭代计算过程没有影响。

2 神经网络结构与计算

本文采用有反馈的多层前馈神经网络，其基本拓扑结构如图 3。网络由输入层，输出

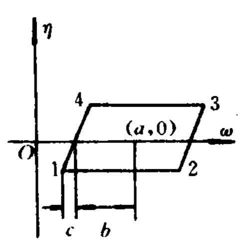

图 2 平行四边形母单元

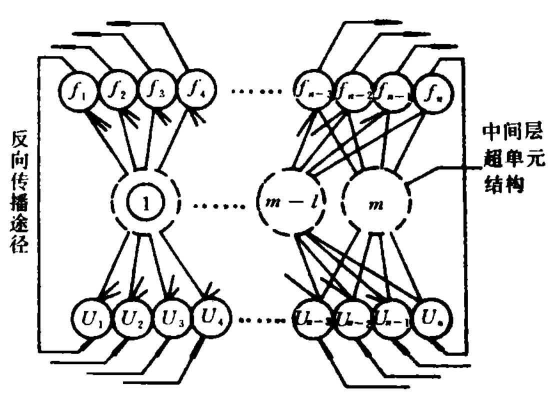

图 3 多层神经网络基本结构（虚线框内区域为中间层超单元结构，单元间以细实线连接表示线性求和）

层和中间层三部分组成。为避免在中间层输入输出空间映射中引入复杂的循环数值积分运算，采用精确积分的平面四结点等参单元方法。等参变换母单元采用平行四边形单元（如图 2 所示），该单元的形函数 N_i 的表达式如下：

$$N_i = \frac{1}{4b}(1+\eta_i\eta)[b+\xi_i(\omega-c\eta-a)] \tag{5}$$

给定单元的几何坐标和物理参数，就可以通过简单的代数运算得到精确刚度矩阵，而不必进行烦琐的数值积分，可以采用神经网络或 VLSI 方法并行实现单元矩阵运算。图 4 给出一简单两层前向网络，其输入层为单元结点位移矢量，输入输出层联接权值存储计算好的单元刚度矩阵 K_{ij}^e，网络完成运算 $f_i^e=K_{ij}^e\cdot U_j^e$。结点位移 U 作为输入矢量，结点力 f 作为输出矢量，根据边界条件，位移已知的结点对应的输入单元其值固定在给定位移值上，其他结点位移赋以随机初始值，则多层网络完成映射

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{m}[C_i^e\cdot K_i^e(C_i^e)^{\mathrm{T}}]U \tag{6}$$

输入层与中间层的联接权值储存$(C_i^e)^{\mathrm{T}}$，中间层与输入层的联接权值储存(C_i^e)。$(C_i^e)^{\mathrm{T}}$由具体求解问题几何划分确定，表示结构位移列阵与单元结点位移列阵关系。中间层前向网络内部联接权值储存 K_i^e，输出层储存输出计算的结点力矢量 $\boldsymbol{f}$，并计算残差 $R=f_g-f$，残差 R 经反向传播途径反馈至输入层。位移已知结点对应的输入单元，不引入反馈。

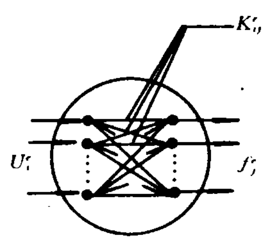

图 4　平面问题神经网络中间层前向网络结构

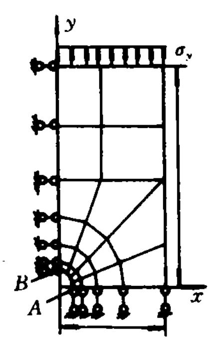

图 5　中心带孔板有限元模型

网络的动力学方程可描述为

$$\frac{\mathrm{d}U_j}{\mathrm{d}t} = \alpha\cdot R_j = -\alpha\cdot(\boldsymbol{f}_j - f_{jg}) \tag{7}$$

这里 α 为反馈因子，下标 j 表示第 j 个输入或输出矢量(不包括位移已知结点单元)。

网络的能量函数可表述为

$$E = \frac{1}{2}\sum_j U_i\cdot f_i - \sum_j U_j\cdot f_{jg} = \Pi_b \tag{8}$$

其中 Π_b 表示引入边界条件后的总位能。

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}U}\cdot\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\alpha\cdot R^{\mathrm{T}}\cdot R \leqslant 0 \tag{9}$$

方程(8)、(9)表明网络的能量函数 $E(t)$ 正确反映了有限元模型，网络运行中能量是单调递减的，当且仅当残差 R 为零时，网络到达稳定状态，网络能量 收敛至极小点。

3 神经网络数值仿真

图 5 所示中心带孔平板，两边承受均匀拉力($\sigma_y=1.6$MPa，$E=700$MPa)。在计算机上虚拟实现神经网络，按式(4) 直接迭代求解，收敛准则为

$$\varepsilon=\frac{\| u^{k+1}-u^k \|}{\| u^{k+1} \|}\leqslant \varepsilon_p \tag{10}$$

计算结果见附表。结果分析表明，该多层反馈网络准确收敛至有限元模型解。计算过程对反馈因子 α 较敏感，α 太小将导致计算速度太慢，过大的 α 将导致数值不稳定，本例中 α 可取 0.05～0.001。为提高收敛速度和计算稳定性，可采用记忆梯度方法加速，记忆梯度迭代过程为

$$U^{K+1}=U^K+\alpha\cdot(R^K+\eta\cdot R^{K-1})$$

其中 η 为惯性因子(一般可取为 0.7)，实现神经网络时需在输出层增加附加储存单元，以存储前次梯度。各种方法计算结果比较如下：

附表 中心圆板计算结果($\alpha=0.02$)

求解方法	计算结果		迭代次数	
	σ_{Ar}(MPa)	B_y(cm)	直接迭代	记忆梯度加速
理论解	4.8			
有限元程序解	4.2013	0.0303		
$\varepsilon=1.0\%$	3,3864	0.0235	218	148
$\varepsilon=0.1\%$	4,1197	0.0296	451	276
$\varepsilon=0.01\%$	4.1849	0.0303	697	407

4 结论与讨论

本文提出了一种由反馈网络和前向网络共同组成的多层神经网络有限元结构分析模型，数值仿真结果表明了神经网络能有效地完成有限元模型求解。由于神经网络计算采用并行计算和分布式数据存储，可实时处理大量数据，如果用硬件实现，神经网络计算速度非常快，不存在传统计算机物理器件极限问题。对于某一类型的问题，神经网络能通过调节内部参数和联接权值以适应不同问题的需要。在 VLSI 电路技术高速发展的今天，在有限元计算领域设计一种并行效率高、适应能力强、具有灵活性的神经网络芯片，使之比传统通用计算机更快、更有效地解决工程实际问题已成为可能。

参考文献

1 Takeuchi J, Kosugi Y. Neural network representation of finite element method. Neural Network, 1994, 7(2): 389

2 Mcclelland J L et al. Parallel distributed Processing, Vol. 1. Cambridge, MIT press, 1986

3 Michael P K, Chual L O. Neural networks for nonlinear programming. IEEE Trans. on circuits and systems, 1988, 35: 554

(责任编辑 石少平)