国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第4期 1996年12月 Vol. 18 No. 4

二阶抛物型方程的 Legendre 谱方法*

熊岳山

(国防科技大学计算机系 长沙 410073)

摘 要 讨论了精确解和 Legendre 谱解的误差估计，应用文中定义的椭圆投影算子，得到了 H 和 H^1 模估计。

关键词 抛物型方程，Legendre 谱方法、椭圆投影算子
分类号 O241

Legendre Spectral Method for Second-order Parabolic Equation

Xiong Yueshan
(Department of Computer Science, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper deals with the estimation of the errors of the exact solution and the Legendre spectral solution. By using the defined elliptic projection operator, we can form the estimations of the errors. Both H and H^1 norm estimations are obtained simultaneously.

Key words parabolic equation, Legendre spectral method, elliptic projection operator

近20年来，谱方法迅速发展，已广泛应用于数学物理领域，如流体力学、气象预报等[1~5]。众所周知，谱方法具有高精度，即如果所求解的偏微分方程的精确解充分光滑，则谱逼近解的收敛阶比 N^{-1} 的任何幂次还高，这里 N 为逼近多项式的次数。文 [1] 中，Canuto 等对线性问题建立了一般的收敛性和稳定性分析。针对抛物型方程，能量方法是估计误差的主要方法，但很难直接得到 H^1 模估计。本文我们应用 Legendre 谱方法求解二阶抛物线型方程，借助于定义的椭圆投影算子同时得到了 H、H^1 模估计（这里 $H=L^2$，H^1 的定义可参见文 [2]）。

设 $\Omega=(-1,1)^n\subset R^n$，考虑下面的二阶抛物型方程

* 1996年3月13日收稿

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t,X), & X \in \Omega, 0 < t \leqslant t^* \\ u = 0, & X \in \partial\Omega,\ 0 < t \leqslant t^* \\ u = u_0(x), & X \in \Omega, t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

这里

$$Au \equiv -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial X_k}\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial X_j} + cu$$

$a_{j,k}(=a_{k,j})$，b_j 和 c 是变量 X 的充分光滑的函数，假设 $c(X) \geqslant c_0 > 0$，c_0 充分大，且

$$A(\omega,\omega) = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial \omega}{\partial X_j}\frac{\partial \omega}{\partial X_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \omega}{\partial X_j}\omega + c\omega^2 \right) \mathrm{d}X$$
$$\geqslant r \| \omega \|_1^2, \qquad \forall\ \omega \in H_0^1(\Omega)$$

$r > 0$，r 为常数。

定义 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上的双线性形式

$$A(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial u}{\partial X_j}\frac{\partial v}{\partial X_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial X_j} v + cuv \right) \mathrm{d}X$$

在前面的假设下，容易验证

①$A(u,v) \leqslant M \| u \|_1 \| v \|_1, \qquad \forall\ u,v \in H^1(\Omega)$

②$A(u,u) \geqslant r \| u \|_1^2, \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$

这里 M，r 为正常数。

(1)式的等价形式为：找映射 $u = u(t): \bar{I} = [0, t^*] \to H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} (u_t, v) + A(u,v) = (f,v), & \forall\ v \in H_0^1(\Omega), t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

1 记号和引理

在后面的讨论中，假定 c 为正常数，c 在不同的式子中取值可以不同。对任意的正整数 N，令 S_N 为关于每一分量 $X_i (i=1,\cdots,n)$ 次数不超过 N 的代数多项式全体。令

$$V_N = S_N \cap H_0^1(\Omega)$$

设 $P_N: L^2(\Omega) \to V_N$ 为 L^2 一正交投影算子，即

$$(P_N v, \phi) = (v, \phi) \qquad \forall\ \phi \in V_N$$

引理 1.1[2] 对任意 $\mu,\sigma, 0 \leqslant \mu \leqslant \sigma$，存在常数 c 使得

$$\| u - P_N u \|_\mu \leqslant c N^{e(\mu,\sigma)} \| u \|_\sigma \qquad u \in H^\sigma(\Omega)$$

这里

$$e(\mu,\sigma) = \begin{cases} 2\mu - \sigma - \dfrac{1}{2}, & \mu \geqslant 1 \\ \dfrac{3\mu}{2} - \sigma & 0 \leqslant \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

假设 L_k 为 k 次 Legendre 多项式，(2)式的 Legendre 谱格式为

找 $$u^N(X) = \sum_{K=0}^{N} u_K L_K(X), \quad K = (k_1, k_2, \cdots, k_n),$$

$L_{k_1}(X_1)\ L_{k_2}(X_2) \cdots\ L_{k_n}(X_n)$满足

$$\begin{cases}(u_t^N,v^N)+A(u^N,v^N)=(f,v^N), & \forall\, v^N\in V_N,t>0\\ u^N(0)=u_0^N\end{cases} \tag{3}$$

这里 u_0^N 为 u_0 的 Legendre 谱近似。

定义椭圆 Galerkin 投影响算子 Π 满足：

$$\Pi: H_0^1(\Omega)\to V_N$$

$$A(\Pi u,\chi)=A(u,\chi),\quad \forall\,\chi\in V_N \tag{4}$$

利用条件①②以及有限元分析中的 Lax—Milgram 定理，易知 Πu 由(4)唯一确定，Πu 称为 V_N 上的椭圆投影。

引理 1.2[8] 若 $u,v\in H_0^1(\Omega)$，则 $|\nabla u,\nabla v)|\leqslant c|A(u,v)|$

引理 1.3 若 $u\in H^\sigma(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$1\leqslant\sigma$，$\Pi u$ 由(4)定义，则

$$\|\Pi u-u\| + N^{-1/2}\|\Pi u-u\|_1\leqslant cN^{1-\sigma}\|u\|_\sigma \tag{5}$$

证明 由 Πu 的定义 $\quad A(\Pi u-u,\chi)=0,\quad \forall\,\chi\in V_N$

由引言条件①②得，$\forall\,\chi\in V_N$

$$\begin{aligned} r\|\Pi u-u\|_1^2 &\leqslant A(\Pi u-u,\Pi u-u)=A(\Pi u-u,\chi-u)\\ &\leqslant M\|\Pi u-u\|_1\|\chi-u\|_1 \end{aligned}$$

由引理 1.1

$$\|\Pi u-u\|_1\leqslant\frac{M}{r}\inf_{\chi\in V_N}\|\chi-u\|_1\leqslant cN^{\frac{3}{2}-\sigma}\|u\|_\sigma \tag{6}$$

下面我们应用对偶方法来估计 $\|\Pi u-u\|$.

对任意 $\phi\in L^2(\Omega)$，令 $w=w(X)$ 为下列问题的解

$$\begin{aligned} -\triangle w=\phi &\quad \text{in } \Omega\\ w=0 &\quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

由分部积分公式及引理 1.2 得

$$\begin{aligned} |(\Pi u-u,\phi|=|-(\Pi u-u,\triangle w)|&=|(\nabla(\Pi u-u),\nabla w)|\\ &\leqslant c|A(\Pi u-u,w)|\\ &=c|A(\Pi u-u,w-\chi)|\\ &\leqslant c\|\Pi u-u\|_1\|w-\chi\|_1,\quad \forall\,\chi\in V_N \end{aligned}$$

应用引理 1.1 和(6)得

$$\begin{aligned} (\Pi u-u,\phi)&\leqslant\|\Pi u-u\|_1\inf_{\chi\in V_N}\|w-\chi\|_1\\ &\leqslant cN^{\frac{3}{2}-\sigma}\|u\|_\sigma N^{-1/2}\|w\|_2\leqslant cN^{1-\sigma}\|u\|_\sigma\|\phi\| \end{aligned}$$

这里我们应用了估计 $\|w\|_2\leqslant c\|\phi\|$.

故

$$\|\Pi u-u\|=\sup_{0\neq\phi\in L^2(\Omega)}\frac{(\Pi u-u,\phi)}{\|\phi\|}\leqslant cN^{1-\sigma}\|u\|_\sigma \tag{7}$$

综合(6)，(7)得引理的证明。

2 误差估计

关于半离散的谱解 $u^N(t)$，我们有下面的 L^2—估计。

定理 2.1 假设 $u(t)$，$u^N(t)$分别为(2)和(3)的解，$1\leqslant\sigma$，则

$$\| u^N(t)-u(t)\| \leqslant \| u_0^N - u_0\| + cN^{1-\sigma}\{\| u_0\|_\sigma + \int_0^t \| u_t\|_\sigma \mathrm{d}\tau\}$$

证明 因 $u^N-u=u^N-\Pi u+\Pi u-u=\theta+\rho$，这里 Πu 由(4)定义。由引理 1.3 得

$$\| \rho(t)\| = \| \Pi u - u\| \leqslant cN^{1-\sigma}\| u(t)\|_\sigma = cN^{1-\sigma}\| u_0 + \int_0^t u_t \mathrm{d}\tau\|_\sigma$$

$$\leqslant cN^{1-\sigma}(\| u_0\|_\sigma + \int_0^t \| u_t\|_\sigma \mathrm{d}\tau) \tag{8}$$

另一方面，$\forall\ \chi\in V_N$

$$\begin{aligned}(\theta_t,\chi)+A(\theta,\chi) &= (u_t^N,\chi)+A(u^N,\chi)-(\Pi u_t,\chi)-A(\Pi u,\chi)\\ &= (f,\chi)-(\Pi u_t,\chi)-A(u,\chi)\\ &= (u_t,\chi)-(\Pi u_t,\chi)\end{aligned}$$

即 $\theta=\theta(t)$满足 $$(\theta_t,\chi)+A(\theta,\chi)=-(\rho_t,\chi)\qquad \forall\ \chi\in V_N \tag{9}$$

令 $\chi=\theta$，则 $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \theta\|^2+A(\theta,\theta)=-(\rho_t,\theta)\leqslant \| \rho_t\| \ \| \theta\|$$

因 $A(\theta,\theta)\geqslant 0$，故 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \theta\| \leqslant \| \rho_t\|$$

因此 $$\| \theta(t)\| \leqslant \| \theta(0)\| + \int_0^t \| \rho_t\| \mathrm{d}\tau$$

由引理 1.3 $$\| \theta(0)\| = \| u_0^N-\Pi u_0\| \leqslant \| u_0^N-u_0\| + cN^{1-\sigma}\| u_0\|_\sigma$$

及 $$\| \rho_t\| = \| \Pi u_t - u_t\| \leqslant cN^{1-\sigma}\| u_t\|_\sigma$$

结合上述讨论定理证明完毕。

下面我们估计 H^1 模误差

定理 2.2 假设 $u(t)$，$u^N(t)$分别为(2)，(3)的解，$\frac{3}{2}\leqslant\sigma$，则对 $0\leqslant t\leqslant t^*$，

$$\| u^N(t)-u(t)\|_1 \leqslant c\{\| u_0^N - u_0\|_1 + N^{\frac{3}{2}-\sigma}[\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\| u(t)\|_\sigma + (\int_0^t \| u_t\|_{\sigma-\frac{1}{2}}^2 \mathrm{d}\tau)^{1/2}]$$

证明 由定理 2.1 证明中相同的技巧，令 $u^N-u=\theta+\rho$，由引理 1.3

$$\| \rho(t)\|_1 = \| \Pi u(t) - u(t)\|_1 \leqslant cN^{\frac{3}{2}-\sigma}\| u(t)\|_\sigma$$

为估计 $\| \theta(t)\|_1$，在(9)中令 $\chi=\theta_t$，故有

$$\| \theta_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(\theta,\theta) = -(\rho_t,\theta_t) + \frac{1}{2}[A(\theta_t,\theta)-A(\theta,\theta_t)]$$

由分部积分公式 $$\begin{aligned}|A(\theta_t,\theta)-A(\theta,\theta_t)| &= \left|\int_\Omega \sum_{j=1}^n b_j\left(\frac{\partial\theta_t}{\partial X_j}\theta - \theta_t\frac{\partial\theta}{\partial X_j}\right)\mathrm{d}X\right|\\ &= \left|\int_\Omega \sum_{j=1}^n\left(2b_j\theta_t\frac{\partial\theta}{\partial X_j} + \frac{\partial b_j}{\partial X_j}\theta_t\theta\right)\mathrm{d}X\right|\\ &\leqslant c\| \theta_t\| \ \| \theta\|_1 \leqslant \| \theta_t\|^2 + c\| \theta\|_1^2\end{aligned}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(\theta,\theta)\leqslant c(\| \theta\|_1^2 + \| \rho_t\|^2)$$

对 t 积分，有 $$\begin{aligned}r\| \theta(t)\|_1^2 &\leqslant A(\theta(t),\theta(t))\\ &\leqslant A(\theta(0),\theta(0)) + c\int_0^t(\| \theta\|_1^2 + \| \rho_t\|^2)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$\leqslant M \| \theta(0) \|_1^2 + c\int_0^t (\| \theta \|_1^2 + \| \rho_t \|^2)\mathrm{d}\tau$$

注意到 $$\| \theta(0) \|_1^2 \leqslant \| u_0^N - u_0 \|_1^2 + N^{2(\frac{3}{2}-\sigma)} \| u_0 \|_\sigma^2$$

故 $$\| \theta(t) \|_1^2 \leqslant c\{ \| u_0^N - u_0 \|_1^2 + N^{2(\frac{3}{2}-\sigma)} \| u_0 \|_\sigma^2 + \int_0^t (\| \theta \|_1^2 + \| \rho_t \|^2)\mathrm{d}\tau \}$$

由 Gronwall 引理(见[1])及引理 1.3 得

$$\| \theta(t) \|_1^2 \leqslant c\{ \| u_0^N - u_0 \|_1^2 + N^{2(\frac{3}{2}-\sigma)} \| u_0 \|_\sigma^2 + \int_0^t \| \rho_t \|^2 \mathrm{d}\tau \}$$

$$\leqslant c\{ \| u_0^N - u_0 \|_1^2 + N^{2(\frac{3}{2}-\sigma)} (\| u_0 \|_\sigma^2 + \int_0^t \| u_t \|_{\sigma-\frac{1}{2}}^2 \mathrm{d}\tau) \}$$

定理证明完毕。

参考文献

1 Canuto C, Hussaini M Y. Spectral method in fluid dynamics. Springer Verlag, New York. 1988

2 Canuto C, Quarteroni A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. Math. Comp. 1982, 38: 67～86

3 Guo B Y, Xiong Y S, A Spectral-difference method for two-dimensional viscous flow. J. Comput. Phys. 1989, 84: 259～278

4 Guo B Y, Xiong Y S. The Fourier pseudospectral-finite difference method for solving two dimensional vorticity equation. Chin. Ann. of Math. 1994, 15(SerB): 469～488

5 Guo B Y, Xiong Y S. Spectral-difference method for solving three-dimensional vorticity equation (Ⅱ). Math. Numer. Sinica, 1991, 13: 331～345

6 Guo B Y, Xiong Y S. Fourier pseudospectral-finite difference method for incompressible flow, J. of Comput. Math, 1994, 12: 312～345

7 Xiong Y S, Guo B Y. Pseudospectral-finite difference method for three-dimensional vorticity equation with unilaterally periodic boundary condition, Appl, Math. & Mech. 1994, 15: 627～647

8 Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978

9 Huang M Y, Thomee V. An error estimate for the H^{-1} Galerkin method for a parabolic problem with nonsmooth initial data. Calcolo, 1982, 19: 115～124.

10 Dupont T. Galerkin methods for first order hyperbolics: an example. SIAM J. Numer Anal. 1973, 10: 890～899

11 Dupont T. L^2—estimates for finite element method for second hyperbolic equations. SIAM J. Numer. Anal, 1973, 880～889

12 Adams R A. Sobolev spaces. New York: Academic press, 1975

(责任编辑　张静)