国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第4期 1996年12月 Vol. 18 No. 4

各向异性材料的有效弹性模量*

江大志 沈 为** 王兴业

(国防科技大学材料工程与应用化学系 长沙 410073
**华中理工大学力学系 武汉 430074)

摘 要 在夹杂理论的基础上，采用用自洽法导出了含分布夹杂的各向异性弹性体的本构关系和有效弹性模量的细观力学表达式。本文得到的公式不仅可以处理含缺陷和损伤的材料的有效弹性模量，而且还可处理诸于纤维复合材料等各向异性材料的理论及有效弹性模量，从而为建立材料细观结构与宏观性能之间的关系提供了理论基础。

关键词 夹杂，自洽法，各向异性体，有效弹性模量

分类号 O347

Effective Elastic Moduli of Anisotropic Materials

Jiang Dazhi Shen Wei** Wang Xingye

(Department of Material Engineering and Applied Chemistry, NUDT, Changsha 410073
**Department of Mechanics, HUST, Wuhan, 430074)

Abstract The theory of inclusion is introduced in this paper. Two meso-mechanical expressions for the constitutive relations and effective elastic moduli of anisotropic media which include distributed inclusions are derived by self-consistent method. The effective elastic moduli of materials which may include defects or damage can be obtained by the expressions. Tthe theoretical and effective elastic moduli of anisotropic media such as fiber composites are also obtained, thus a relationship between the meso-structures and macro-properties of materials are established by the expressions.

Key words inclusion, self-consistent method, anisotropic media, effective elastic moduli

夹杂理论是研究具有特征应变 ε^*（或等效特征应变）的子域 Ω 在外场（应力场或应

---

* 国家自然科学基金资助。
1996年1月6日收稿

变场）作用下所引起的应变扰动和应力扰动的方法。由于夹杂问题在固体材料中普遍存在，所以近几十年来一直受到材料学家和力学家们的普遍关注。夹杂问题的研究始见于Eshelby[1]的论文，最初研究的是在金属材料中由于位错引起的应力扰动。早期人们关注的是均质材料中的位错、多晶、杂质和空隙等夹杂引起的应力和应变扰动，以及夹杂的存在对材料宏观弹性性能的影响。这方面有特殊贡献的研究者还有：Willis[2]、Budiansky[3]、Hill[4]、Hashin[5]等。Hill[5]和Hashin[7]等将这一理论应用于弥散强化材料，尤其是各向同性复合材料。横观各向同性的纤维增强复合材料的理论弹性性能也可应用这一理论得到。

1 等效夹杂理论

设在无外力且无表面力约束下，弹性固体 D 内某子域 Ω 具有特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$。特征应变是指非弹性应变，如热应变、相转变应变、初始应变、塑性应变以及非协调应变等。Eshelby[8]将特征应变称为无应力转换应变（stress-free-transformation strain）。

子域 Ω 称为夹杂（inclusion），有

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^* \neq 0 & (\text{在 } \Omega \text{ 中}) \\ \varepsilon_{ij}^* = 0 & (\text{在 } D-\Omega \text{ 中}) \end{cases} \tag{1}$$

当子域 Ω 的弹性模量张量 $\boldsymbol{C}^*$ 与固体（$D-\Omega$）中的弹性模量张量 $\boldsymbol{C}$ 不同时，子域 Ω 被称为异质（inhomogeneity）。

现考虑弹性模量张量为 $\boldsymbol{C}$ 的无限体，远场有工作应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$，其中含有一个异质 Ω，其弹性模量为 $\boldsymbol{C}^*$（$\boldsymbol{C}^* \neq \boldsymbol{C}$）。由于外力作用，异质将在体内引起应力扰动 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应变扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}$，总的应力场为 $\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^0$，相应的总应变场为 $\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^0$，这里的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 为无异质情况下的应变场，有

$$\varepsilon_{ij}^0 = C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}^0 \tag{2}$$

因此，此固体的本构关系可写为

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij} = C_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}) \qquad (\Omega) \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}) \qquad (D-\Omega) \tag{4}$$

再考虑上述含异质固体的等效体 D（包含 Ω），其弹性模量张量为 $\boldsymbol{C}$，但 Ω 具有特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$，设远场有工作应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$，Ω 内的本构关系为

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \qquad (\Omega) \tag{5}$$

其中：

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0 \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^* \end{cases} \tag{6}$$

这里 S_{ijkl} 为相应于夹杂 Ω 的 Eshelby 张量[8]，它与夹杂的形状和性质有关。

由（3）式和（5）式，得到以下应力等效的充分必要条件

$$C_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \qquad (\Omega) \tag{7}$$

这就是等效夹杂理论的基本方程。

2 含有分布夹杂的弹性体的有效模量

设含有 n 个分布夹杂 Ω_r（$r=1, 2, 3, \cdots, n$）的弹性体 D，其有效弹性模量张量 $\widetilde{\boldsymbol{C}}$。

此弹性体受远场应力 σ^0 作用，它的本构关系为

$$\sigma_{ij}^0 = \tilde{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0 \tag{8}$$

（1）先考虑弹性体中某夹杂 Ω_r，其弹性模量张量为 C^r，含有特征应变张量 ε^{r*}，引起扰动应力 C^r，总应力张量为

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^r = C_{ijkl}^r(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^r) \qquad (\Omega_r) \tag{9}$$

取等效体 D（具有弹性模量 $\tilde{C}$），总应力张量为

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^r = \tilde{C}_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^r - \varepsilon_{kl}^{r*}) \quad (\Omega_r) \tag{10}$$

根据等效夹杂理论，由（9）式和（10）式得

$$C_{ij}^r(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^r) = \tilde{C}_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^r - \varepsilon_{kl}^{r*}) \qquad (\Omega) \tag{11}$$

式中，在 Ω_r 内，扰动应变 ε^r 和特征应变 ε^{r*} 的关系为

$$\varepsilon_{ij}^r = S_{ijkl}^r\varepsilon_{kl}^{r*} \tag{12}$$

这里，S_{ijkl}^r 为相应于夹杂 Ω_r 的 Eshelby 张量。由（11）式得

$$(\tilde{C}_{ijkl} - C_{ijkl}^r)(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^r) = \tilde{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{r*} \tag{13}$$

应用（12）式，上式还可写成：

$$\begin{aligned}(\tilde{C}_{ijkl} - C_{ijkl}^r)\varepsilon_{kl}^0 &= \tilde{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{r*} - (\tilde{C}_{ijkl} - C_{ijkl}^r)S_{ijkl}^r\varepsilon_{mn}^{r*} \\ &= [\tilde{C}_{ijkl} - (\tilde{C}_{ijkl} - C_{ijkl}^r)S_{klmn}^r]\varepsilon_{mn}^{r*}\end{aligned} \tag{14}$$

记
$$\mathrm{E}_{ijkl}^r = \tilde{C}_{ijkl} - C_{ijkl}^r \tag{15}$$

$$g_{ijkl}^r = \tilde{C}_{ijkl} - E_{ijmn}^r S_{mnkl}^r \tag{16}$$

则式（14）改写为
$$\mathrm{E}_{ijkl}^r\varepsilon_{kl}^0 = g_{ijkl}^r\varepsilon_{kl}^{r*} \tag{17}$$

或
$$\varepsilon_{ij}^{r*} = (g_{ijmn}^r)^{-1}\mathrm{E}_{mnkl}^r\varepsilon_{kl}^0$$

代入（13）式，得
$$\mathrm{E}_{ijop}^r\ (\varepsilon_{op}^0 + \varepsilon_{op}^r)\ = \tilde{C}_{ijmn}\ (g_{mnop}^r)^{-1}\mathrm{E}_{opkl}^r\varepsilon_{kl}^0 \tag{18}$$

可以导出总应变
$$\begin{aligned}\varepsilon_{op}^0 + \varepsilon_{op}^r &= (\mathrm{E}_{opij}^r)^{-1}\tilde{C}_{ijmn}\ (g_{mnop}^r)^{-1}\mathrm{E}_{opkl}^r\varepsilon_{kl}^0 \\ &= \mathrm{h}_{opkl}^r\varepsilon_{kl}^0\end{aligned} \tag{19}$$

式中
$$\mathrm{h}_{opkl}^r = (\mathrm{E}_{opij}^r)^{-1}\tilde{C}_{ijmn}(g_{mnop}^r)^{-1}\mathrm{E}_{opkl}^r \tag{20}$$

h_{opkl}^r 相当于 Ω_r 的应变集中张量。还因为

$$\sigma_{rs}^0 + \sigma_{rs}^r = C_{rsop}^r(\varepsilon_{op}^0 + \varepsilon_{op}^r) \quad (\Omega_r) \tag{21}$$

有
$$\sigma_{rs}^0 + \sigma_{rs}^r = C_{rsop}^r\mathrm{h}_{opkl}^r\varepsilon_{kl}^0$$

（2）再考虑含有 n 个分布夹杂的弹性体 D，设平均应变 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^0$ 和平均应力 $\bar{\sigma} = \sigma^0$，且

$$\bar{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{22}$$

对弹性体 D，应用叠加原理及自洽法[8]，由（19）式得平均应变为

$$\bar{\varepsilon}_{op} = v_0\varepsilon_{op}^m + \sum_{r=1}^{n} v_r\mathrm{h}_{opkl}^r\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{23}$$

式中，v_0 为基体的体积分数，v_r 为 Ω_r 的体积分数，且有 $v_0 + \sum_{r=1}^{n} v_r = 1$

由（21）式得平均应力为

$$\bar{\sigma}_{rs} = v_0\sigma_{rs}^m + \sum_{r=1}^{n} v_r C_{rsop}^r\mathrm{h}_{opkl}^r\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{24}$$

在（23）式和（24）式中，ε^m_{rs}和σ^m_{rs}分别为基体的平均应变和平均应力，且有

$$\sigma^m_{rs} = C_{rsop}\varepsilon^m_{op} \tag{25}$$

将（23）式代入（24）式，考虑（25）式，可以导出以下本构关系：

$$\bar{\sigma}_{rs} = [C_{rskl} + \sum_{r=1}^{n} v_r (C^r_{rsop} - C_{rsop}) \mathrm{h}^r_{opkl}]\varepsilon_{kl} \tag{26}$$

将上式与（22）式比较，得含有分布夹杂的弹性体的有效弹性模量的细观力学计算公式：

$$\widetilde{C}_{rskl} = C_{rskl} + \sum_{r=1}^{n} v_r (C^r_{rsop} - C_{rsop}) \mathrm{h}^r_{opkl} \tag{27}$$

3 结论与展望

本文采用等效夹杂的概念，导出了含分布夹杂的各向异性弹性体的本构关系和有效弹性模量的细观力学表达式，为建立材料细观结构与宏观性能之间的关系提供了理论基础。

按照夹杂和特征应变的一般定义，热应变和塑性应变等残余应变以及非协调应变等均可视为特征应变；在均质材料中，孔隙（洞）、裂纹等损伤区可视为夹杂；在非均质材料如复合材料中，增强相（如颗粒、晶须、纤维等）也可视为在基体相中的异质夹质。因此，采用本文得到的公式不仅可以处理含缺陷和损伤的材料的有效弹性模量，而且还可以处理诸于纤维复合材料等各向异性材料的理论及有效弹性模量。

参考文献

1 Eshelby J D. Dislocations as a cause of mechanical damping in metals. Proc. Roy. Soc. ,A197,1949: 396～416

2 Willis J R. Dislocations and inclusions. J. Mech. Phys. Solods, 1965, (13): 377～395

3 Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. J. Mech. Phys. Solods, 1965, (13): 223～227

4 Hill R. Continuum micro-mechanics of elastic polycrystals. J. Mech. Phys. Solids, 1965, (13): 89～101

5 Hashin Z. Theory of mechanical behavior of heterogeneous media. Appl. Mech. Rev., 1964, (17): 1～9

6 Hill R. Theory of mechanical properites of fibre-strengthened materials - Ⅱ, self-consistent model. J. Mech. Phys. Solids, 1965, (13): 189～198

7 Hashin Z. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. J. Appl. Mech., 1979, (46): 543～550

8 Mura T. Micromechanics of defects in solids, sec ed. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1987, 1～3

（责任编辑　卢天觊）