

武器精度截尾 SPOT 检验最大风险计算*

张学斌 王维平 朱一凡

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘要 就正态圆分布的武器命中精度的截尾序贯检验后加权检验犯两类错误概率上界的计算问题,指出了目前沿用的计算公式的错误,推导了新的计算公式,并给出了算例,分析了计算结果的合理性;同时,指出了目前截尾点选取方法存在的问题。

关键词 截尾 SPOT 方法, 武器精度鉴定, 弃真概率, 取伪概率
分类号 O224

Maximum Risk Evaluation on Truncated SPOT Method in Weapon Accuracy Assessment

Zhang Xuebin Wang Weiping Zhu Yifan

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper discusses the calculation of the upper limit of two kind errors of the truncated sequential posterior odd test method in assessment of weapon accuracy which follows the normal circle distribution. The authors point out some errors in former formula, then provide new formula and samples. The authors also analyze the problem to select the truncating point.

Key words truncated SPOT method, weapon accuracy assesment, probability of type 1 error, probability of type 2 error.

1 武器精度鉴定的统计描述

命中精度是各种导弹、制导炮弹、制导鱼雷等精确制导武器的极其重要的战术技术指标,最常用的标准是圆概率偏差(CEP)。一般地,可假设导弹落点的纵、横偏差是独立的,且纵、横偏差的干扰因素大体上相同,即 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, 落点偏差 (x, y) 具有圆散布^{[1],[5]}, 其

* 国防科技预研基金资助项目
1996年3月26日收稿

联合分布密度函数为:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_x)^2 + (y - \mu_y)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1)$$

则命中精度的近似表达式:

$$CEP = 1.1774\sigma \quad (2)$$

式(2)表达了精度指标 CEP 与均方差 σ 的近似关系。因此,精度鉴定在统计学中归结为正态总体的方差检验问题。

在精度鉴定的序贯试验中,综合利用落点的纵横偏差 (x, y) ,以 Releigh 变量 r 作为落点随机变量,其概率密度函数为:

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} r e^{-r^2/2\sigma^2} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (3)$$

并以 $D = \sigma^2$ 作为检验参数,设其验前概率密度函数为逆 Gamma 函数^[1]:

$$g(D; \alpha, \beta_0) = \frac{\alpha^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} D^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha}{D}} \quad (4)$$

其中, α^0, β_0 为已知常数,依赖于掌握的验前信息。

2 两类错误概率上界的计算公式与算例

α_N 与 β_N 的一般计算十分困难,上界值 $\alpha_{N\pi 0}$ 与 $\beta_{N\pi 1}$ 也仅对某些特殊问题,例如满足式(1)、(3)、(4)的正态总体未知方差的武器命中精度检验才可以计算。

根据文献[1]有:

$$\alpha_{N\pi 0} = \alpha_{\pi 0} + \frac{\alpha^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^{D_0} \left[Q_{2N-2}\left(\frac{kC}{D}\right) - Q_{2N-2}\left(\frac{kB}{D}\right) \right] D^{\beta_0+1} e^{\alpha_0/D} dD \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} Q_{2N-2}\left(\frac{kC}{D}\right) = 1 - K_{2N-2}\left(\frac{kC}{D}\right) \\ Q_{2N-2}\left(\frac{kB}{D}\right) = 1 - K_{2N-2}\left(\frac{kB}{D}\right) \end{cases}$$

为具有 $2N-2$ 个自由度的 χ^2 一分布的上概率。

由于 $2N-2$ 是偶数, 于是

$$Q_{2N-2}\left(\frac{kC}{D}\right) = e^{-\frac{kC}{2D} N-2} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{2^i i!} \left(\frac{kC}{D}\right)^i \quad (6)$$

记式(4)右端第1个积分为 $I_{2N-2}^{(C)}$, 则有:

$$\begin{aligned} I_{2N-2}^{(C)} &= \frac{\alpha^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^{D_0} e^{-\frac{kC}{2D} N-2} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{2^i i!} \left(\frac{kC}{D}\right)^i D^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{D}} dD \\ &= \left(\frac{\alpha_0}{\alpha C}\right)^{\beta_0} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{k^i C^i}{2^i i!} \frac{\Gamma(\beta_0 + i)}{\Gamma(\beta_0) \alpha^i} \int_0^{D_0} g(D; \alpha C, \beta_0 + i) dD \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\alpha C = \alpha_0 + kC/2$

注意到:

$$\int_0^{D_0} g(D; \alpha c, \beta_0 + i) dD = 1 - K_{2(\beta_0+1)}\left(\frac{2\alpha c}{D_0}\right) = Q_{2(\beta_0+1)}\left(\frac{2\alpha c}{D_0}\right)$$

将上式代入(7),

$$I_{2N-2}^{(C)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha c}\right) \beta_0 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{k c}{2\alpha c}\right)^i \frac{\Gamma(\beta_0 + i)}{\Gamma(\beta_0) i!} Q_{2(\beta_0+i)}\left(\frac{2\alpha c}{D_0}\right) \quad (8)$$

式(4)右端第2个积分记为 $I_{2N-2}^{(B)}$, 其表达式及其有关数据相应地由式(8)将字母 C 换为 B 得到。这样, 截尾方案 T_N 犯弃真错误概率的上界如下式所示:

$$\alpha_{N\pi_0} = \alpha_{\pi_0} + I_{2N-2}^{(C)} - I_{2N-2}^{(B)} \quad (9)$$

同理可得方案 T_N 犯取伪错误概率的上界 $\beta_{N\pi_0}$ 的表达式:

$$\beta_{N\pi_0} = \beta_{\pi_0} + J_{2N-2}^{(A)} - J_{2N-2}^{(C)} \quad (10)$$

式中

$$J_{2N-2}^{(A)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_A}\right) \beta_0 \sum_{i=0}^{N-2} \left(\frac{k_A}{2\alpha_A}\right)^i \frac{\Gamma(\beta_0 + i)}{\Gamma(\beta_0) i!} K_{2(\beta_0+i)}\left(\frac{2\alpha_A}{D_0}\right) \quad (11)$$

$J_{2N-2}^{(C)}$ 的表达式相应地由式(11)将字母 A 换为 C 得到。

值得指出的是, 式(8)、(11)既与文献[2]、[3]中的不同, 也与文献[1]、[4]、[5]中的不同。

在式(8)、(9)及(10)、(11)中, α_{π_0} 、 β_{π_0} 分别为非截尾时考虑验前信息的弃真和取伪概率, 通常取为常数。 α_0 、 β_0 、 A 、 B 对于给定的验前信息子样 r_i^0 , ($i = 1, \dots, n_0$) 也为常数^{[1]、[5]}。因此 $\alpha_{N\pi_0}$ 、 $\beta_{N\pi_0}$ 仅为截尾点 C 和实际打靶次数 N 的函数, 而和实际打靶的具体落点无关。为考查分析 $\alpha_{N\pi_0}$ 、 $\beta_{N\pi_0}$ (亦即甲、乙双方所承担的最大风险) 与截尾点 C 和 N 的关系, 编程做了大量的计算, 使用的有关数据, 选自文献[3]。

附表

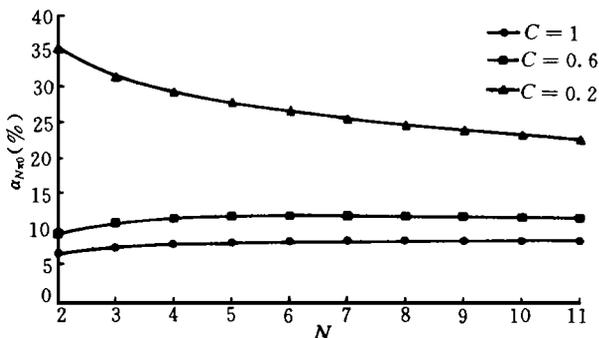
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0.2	α	35.28	31.35	29.30	27.82	26.64	25.66	24.82	24.09	23.44	22.86
	β	15.82	12.67	10.59	9.53	8.88	8.42	8.07	7.81	7.59	7.41
0.3	α	20.41	21.17	20.97	20.57	20.12	19.68	19.26	18.86	18.50	18.16
	β	23.14	17.48	14.37	12.72	11.66	10.90	10.34	9.90	9.53	9.23
0.6	α	9.34	10.88	11.55	11.86	11.99	12.02	12.00	11.99	11.89	11.81
	β	31.96	25.42	21.41	10.05	17.42	16.22	15.27	14.51	13.88	13.35
0.9	α	6.49	7.96	8.53	8.85	9.05	9.16	9.22	9.24	9.25	9.24
	β	35.27	29.27	25.27	22.77	20.98	19.60	18.51	17.60	16.84	16.19
1.0	α	6.56	7.45	7.96	8.27	8.46	8.58	8.65	8.68	8.70	8.70
	β	35.95	30.14	26.19	23.69	21.88	20.47	19.35	18.41	17.63	16.95
2.0	α	5.34	5.63	5.84	5.99	6.10	6.18	6.24	6.28	6.31	6.33
	β	39.03	34.61	31.25	28.99	27.24	25.81	24.61	23.59	22.69	21.91
3.5	α	5.08	5.17	5.23	5.29	5.33	5.36	5.39	5.41	5.42	5.43
	β	40.33	36.82	34.03	32.12	30.58	29.27	28.14	27.14	26.26	25.46

验前子样容量 $n_0 = 5$, 落点均方根偏差 $\sigma^{(0)} = 1.274$, $D_0 = 1.623$, $\alpha_{\pi_0} = \beta_{\pi_0} = 0.05$ 。此时有:

$$\alpha_0 = (n_0 - 1)[\sigma^{(0)}]^2 = 6.492, \beta_0 = n_0 = 5$$

$$P_{H_0} = Q_{2\beta_0}\left(\frac{2\alpha_0}{D_0}\right) = Q_{10}(8) = 0.63, A = 0.082, B = 6.4$$

计算结果见附表。表中 α 、 β 分别表示弃真概率和存伪概率的上界 $\alpha_{N\tau_0}$ 、 $\beta_{N\tau_1}$ ，其数值的“%”均省略。不同 C 值的几条 $\alpha_{N\tau_0}-N$ 曲线如附图所示。



附图 不同 C 值的 $\alpha_{N\tau_0}-N$ 曲线

3 结束语

(1) 在整个区间 $[A, B]$ ，风险值的和 $\alpha_{N\tau_0} + \beta_{N\tau_1}$ 、 $\beta_{N\tau_1}$ 均是 N 的减函数。而 $\alpha_{N\tau_0}$ 在 $C = 0.2$ 时为 N 的减函数；在 $0.3 < C < 0.9$ 时有一个极大值；在 $C = 1$ 时为 N 的增函数。并不象文献[3]所述 $\alpha_{N\tau_0}$ 为 N 的减函数，这是由于计算公式不同造成的。

(2) 对同一停时 N ，当截尾点 C 在区间 $[A, B]$ 中右移趋近 B 时，接受假设 H_0 的区域变大，弃真概率减小，取伪概率相应增大； C 点左移趋近 A 时，接受假设 H_0 的区域变小，弃真概率增大，取伪概率相应减小。这是合乎逻辑的。

(3) 截尾点 C 在不同的位置时，可能导致 $\alpha_{N\tau_0}$ 与 $\beta_{N\tau_1}$ 的值相差较大。工程实践中往往取截尾点 $C = 1$ ，这是不合理的，缺乏理论根据。如何选取截尾点 C ，使风险值 $\alpha_{N\tau_0}$ 与 $\beta_{N\tau_1}$ 相对合理而又尽可能小，是个值得进一步探讨的问题。

本文写作过程得到了张金槐教授的大力支持，在此谨表谢意。

参考文献

- 1 张金槐，唐雪梅. Bayes 方法. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989
- 2 张金槐. 关于 Bayes 序贯检验的一些思考. 飞行器测控技术, 1992(2): 1~8
- 3 张金槐. 利用验前信息的一种序贯检验方法—序贯后加权检验方法. 国防科技大学学报, 1991; 13(2): 1~13.
- 4 张金槐. 特小样本下落点密麻鉴定—SPOT 方法的应用. 飞行器测控技术, 1989, (1): 1~16
- 5 张金槐. 远程火箭精度分析与评估. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995

(责任编辑 石少平)