

# 一种摄像机成像误差的程序化修正方法\*

罗飞路 姬 涛 陈棣湘

(国防科技大学机械电子工程与仪器系 长沙 410073)

**摘 要** 运用函数逼近与统计检验理论对摄像机成像误差修正法进行了研究, 提出一种程序式的修正方法, 使成像误差修正过程无需凭人工经验反复尝试, 提高了误差修正的质量与效率。

**关键词** 摄像机标定, 成像误差修正

**分类号** O435.2

---

## Programmed Correction of Camera Distortion

Luo Feilu Ji Tao Chen Dixiang

(Department of Mechatronics and Instrumentation, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In the paper the programmed correction of camera distortion is presented, which is based on the theory of function approximation and statistical detection. In virtue of this procedure, the camera distortion correction is straight-forward and does not need any prior knowledge of the distortion. An accurate correction can be obtained.

**Key words** camera calibration, camera distortion correction

---

普通 CCD 摄像机的高精度标定在计算机视觉技术中有着重要的意义<sup>[1-3]</sup>, 例如在机器人视觉、目标定位、运动轨迹分析、视觉检测、自动装配等等应用领域中。普通 CCD 摄像机在成像时有较大的成像误差, 因此, 有效地进行成像误差修正是摄像机高精度标定工作中不可缺少的一个环节。由于摄像机与成像系统千差万别, 系统误差与随机误差相互混杂, 所以迄今为止, 成像误差修正一直需要凭人的经验, 反复进行尝试。本文运用函数逼近与统计检验理论, 提出了一种修正方法, 将成像误差修正过程程序化, 可提高误差修正的质量与效率。

---

\* 国防预研基金资助项目

# 1 摄像机标定与成像误差修正

摄像机标定是确定摄像机的成像参数，并对成像误差进行修正的过程。图1给出了摄像机成像的基本过程。图中， $O_e-X_eY_eZ_e$  为摄像机坐标系， $Z_e$  轴与摄像机的光轴重合。 $O-XYZ$  为世界坐标系， $P$  为空间一点，其世界坐标系与摄像机坐标系中的三维坐标分别为  $(X, Y, Z)$  与  $(X_e, Y_e, Z_e)$ 。 $O-UV$  为图像平面坐标系。 $O$  为光轴与图像平面的交点。 $U$  轴， $V$  轴分别与摄像机坐标系的  $X_e$  轴、 $Y_e$  轴相平行。据透视成像理论，点  $P$  与摄像机镜头中心  $O_e$  的连线与图像平面的交点  $P$

$(U, V)$  为点  $P$  的图像。但由于成像误差，点  $P$  的实际图像为  $P'(U', V')$ 。图像坐标  $(U, V)$  再经过图像采集板的转换 (A/D 转换，长度坐标  $U, V$  到计算机帧存坐标  $U, V$  的转换等等)，便得到摄像机的成像模型<sup>[1][4]</sup>。其 DLT 形式为

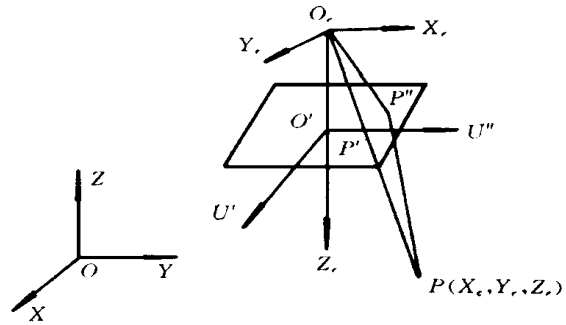


图1 摄像机成像与成像误差

$$U + \Delta U = \frac{A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14}}{A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + 1} \quad (1a)$$

$$V + \Delta V = \frac{A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24}}{A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + 1} \quad (1b)$$

式中  $A_{ij}$  为摄像机的成像参数； $U, V$  为点  $P$  的图像在计算机帧存中的坐标，单位为像元； $\Delta U, \Delta V$  为  $U$  轴、 $V$  轴方向的成像误差。

对摄像机进行标定，要利用一批已知的坐标系的点（称为控制点）。由这些控制点的  $X, Y, Z$  坐标及对应的图像坐标  $U, V$ ，就可以进行标定。显然，要进行高精度的标定，必须顾及摄像机成像模型中的成像误差。

造成成像误差的因素很多<sup>[1]</sup>，例如摄像机镜头的径向成像误差、切向成像误差，成像系统中两个图像坐标轴并非绝对垂直， $U$  轴与  $V$  轴的尺度因子不相等，摄像机光轴与图像平面不垂直，镜头中各个镜片的中心不在一条直线上等等。这些因素所造成的误差属系统误差，但对各种摄像机及成像系统（摄像机、图像卡、计算机），这种系统误差差别很大。除了系统误差以外，还有随机性因素引起的误差，例如，成像模型中以图像坐标  $U, V$  为控制点的图像点（称为特征点）。特征点坐标的提取，是以特征点图像模型与特征点定位算法为基础的。但是由于摄像机成像范围内光照的不均匀，光照强度的随机波动，在图像平面各处成像系统光电信号转换的不一致性与随机性等因素的干扰，所以同一个特征点图像模型与特征点定位算法不可能完全相同地适用全部特征点，因而导致特征点定位的误差在图像平面内随机变化，即在  $\Delta U, \Delta V$  中有随机成分。在修正摄像机成像误差时，应当考虑这些随机误差。

迄今为止，对成像误差修正进行了许多理论与实验研究。由于引起成像误差的因素过

于复杂而且这些因素会随摄像机及成像系统而变化,因此成像误差的修正要凭人的经验,并进行反复尝试,才能得到较好的效果。

## 2 成像误差与函数逼近

考虑到成像误差随图像坐标  $U, V$  的逐点变化,可以用图像坐标  $U, V$  的二元函数  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  来表示水平与垂直两个图像坐标方向的成像误差。显然,  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  为两个未知的二元函数,成像误差修正的过程可以看成是搜索、求解这两个未知的二元函数的过程。

为了简化分析,我们暂不考虑随机性因素引起的误差,即认为成像误差函数  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  纯属一种系统误差。进行系统误差补偿时,可以运用函数逼近的理论,用一组已知的函数的组合起来近似  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$ 。不失一般性,我们假定

$$\begin{cases} \Delta u(u, v) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \alpha_{iku}^i v^k \\ \Delta v(u, v) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \beta_{ikv}^i v^k \end{cases} \quad (2)$$

对于的一般的工程问题,可以认为以上假设是得到满足的。因而,可以用幂级数的部分和来逼近成像误差函数  $\Delta U(U, V)$ 、与  $\Delta V(U, V)$ ,成像误差的修正可通过幂级数的部分和来实现。

摄像机的标定,是利用若干 ( $m$  个) 已知其世界坐标系的三维坐标的控制点来实现的。利用控制点已知的三维坐标及对应的图像坐标,根据成像模型来求取成像参数与进行成像误差修正。假定暂不考虑式 (1) 中的成像误差,  $m$  个控制点可列写  $2m$  个方程,求出  $11$  个成像参数后,这  $2m$  个方程的残差可认为是  $\Delta U(U, V)$  与  $\Delta V(U, V)$  在  $m$  个图像点上的取值。利用  $\Delta U(U, V)$  与  $\Delta V(U, V)$  各自在图像平面上  $m$  个点的取值,可以列写  $m$  个方程来求出其逼近函数。例如对  $\Delta U(U, V)$ ,在点  $(U_i, V_i)$  上有

$$\alpha_0 + \alpha_{10}u_i + \alpha_{01}v_i + \alpha_{20}u_i^2 + \alpha_{11}u_i v_i + \alpha_{02}v_i^2 + \dots + \alpha_{n0}u_i^n + \alpha_{n-1,1}u_i^{n-1}v_i + \dots + \alpha_{n0}v_i^n = \Delta u_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

式中,  $n$  为幂级数部分和的最高幂次,  $\Delta u_i$  为  $\Delta U(U, V)$  在点  $(U_i, V_i)$  处模型的残差,未知系数个数为  $(n+1)(n+2)/2$ 。

由于暂不考虑随机因素引起的误差,成像误差  $\Delta U(U, V)$  与  $\Delta V(U, V)$  纯属一种系统误差,可考虑增加逼近的部分和中的最高幂次  $n$ ,以完善修正效果。例如取  $(n+1)(n+2)/2 = m$ ,此时为插值逼近  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$ 。如果幂次过高,虽然插值函数在  $m$  个插值点附近能很好地逼近成像误差函数,但是在其它处两者的差异却很大。

事实上,随机性因素的误差总是存在的,所以  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  是系统误差  $\Delta$  与随机误差  $\delta$  之和。

$$\begin{aligned} \Delta U(U, V) &= \Delta U(U, V) + \delta U(U, V) \\ \Delta V(U, V) &= \Delta V(U, V) + \delta V(U, V) \end{aligned} \quad (4)$$

系统误差与随机误差混叠在一起,采用插值逼近方式是对合成误差的插值,而非对系统误差部分  $\Delta$  的插值,所以插值逼近方式在这种情况下是一种不可取的方式,而应采用最

佳平方逼近<sup>[6]</sup>。最佳平方逼近相当于用最小二乘估计求逼近函数中的参数，此方法具有抑制随机误差，提高精度的效果<sup>[7]</sup>。

以上分析中，并未对成像误差函数  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  的具体函数形式作任何假定，因而我们可以知道：用幂级数的部分和来逼近成像误差函数可以普遍适用于各种成像系统，具有广泛的意义。

### 3 成像误差最佳修正与 F 检验

一般讲来，在修正摄像机成像误差时应当考虑随机因素所引起的存在。例如，敏感元件（CCD 器件）能量与信号转换时的随机性，照明条件随时间的波动等。图像特征点定位算法是在一定的特征点模型的假定下建立的，位于图像平面上各处的诸多特征点的实际情况与这个假定的模型存在差异，而这种差异是随特征点图像坐标  $(U, V)$  与照明光线入射方向而随机变化……这些因素都要引起随机误差。这种随机误差是难以用系统误差修正的方法进行修正的，对其建立模型以进行修正是有待进一步研究的课题。在统计意义上，可以把成像误差  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  中的随机成分  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  完全分离出来，从而实现了对系统误差部分  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  的最佳逼近，这一过程可以称为成像误差的最佳修正。但实际上系统误差与随机误差混杂在成像模型（式1）的残差中，是不易分离的，因而难以确定进行系统误差函数逼近时的幂级数的部分和阶次。

在动态数据建模中亦有类似的问题。利用观测数据建立一个时间序列模型，首先面临的问题是模型结构辨识，即确定模型的类型与阶次，如  $AR(n)$ 、 $AR(n, m)$ 。由于噪声序列没有观测值，这种模型结构辨识是基于残差平方，最小原则和简洁原则。S. M. Pandit 与 S. M. Wu 基于这两条原则及运用  $F$  统计检验，建立了从低阶到高阶搜索建模的规范化方法。这种方法利用了计算机的能力，简化了模型结构辨识中建模者的分析工作，减少了人工试凑的因素，有利于提高建模的质量与效率，得到广泛地应用。

在确定成像系统误差函数逼近时幂级数部分和阶次时，残差平方、最小原则与简洁原则也是应当用来作为基本原则的。我们先来分析式（4）。假定运用函数逼近的理论已对成像系统误差分  $\Delta U(U, V)$ 、 $\Delta V(U, V)$  实现了最佳修正（例如，在各个控制点形成的图像特征点上，逼近的函数的值就等于成像系统误差的值），此时成像模型残差只剩下随机误差  $\Delta U(U, V)$  或  $\Delta V(U, V)$  这一项。尽管成像系统误差与随机误差可能出现正负相互抵消的情况，但是从统计的观点来看，在所有特征点上成像模型的残差平方和应当达到最小值。所以残差平方和最小可以作为确定最佳修正的幂级数部分和阶次的一个基本准则。由于在确定成像系统误差最佳修正时，判断残差平方和是否达到最小，只能根据有限个样本数据（有限个方程残差）进行判断。因此不难想象，在给定的统计检验的显著性水平上，同一组观察数据（同一组方程残差）作为逼近函数的幂级数部分和可能有多于一个的阶次符合残差平方和最小的条件。所以，在确定成像系统误差修正的最佳阶次时，还应有一个重要原则，即简洁原则。也就是说，在给定的统计检验标准下的符合残差平方和最小这一原则的各种可能的阶次中，应当选取值为最小的阶次作为最佳修正阶次。简洁原则保证了根据观测数据（方程残差）建立的成像系统误差逼近函数具有最简

洁的形式。由于成像误差不可避免地包括有随机误差, 原始数据(控制点的三维空间坐标与图像坐标)亦有误差, 简洁原则使求得的成像系统误差逼近函数对这些误差最不敏感, 在整个图像平面上的成像误差修正的总体效果最好。

$F$  检验同时体现了残差平方和最小原则与简洁原则, 可以用来实施最佳逼近阶次的确定。以  $m$  表示用来标定的已知世界坐标系三维坐标的控制点数, 根据摄像机成像模型, 这  $m$  个控制点可以列写  $2m$  个方程。这  $2m$  个方程中, 有  $m$  个是根据成像模型列写, 表示图像坐标  $U$  与成像参数之间的关系, 为简单起见, 可称为  $U$ - 方程。类似地, 其余的  $m$  个方程, 可简称为  $V$ - 方程。显而易见, 在进行成像误差修正时, 图像坐标  $U$  与图像坐标  $V$  的误差最佳逼近阶次一般是不相等的, 所以应建立两个样本统计量分别对  $U$  坐标误差与  $V$  坐标误差确定其最佳逼近阶次。

#### 4 实验结果

为检验所提出的摄像机成像误差修正方法的效果, 我们用两台普通 CCD 摄像机构成一个立体视觉系统, 即两台摄像机(左摄像机与右摄像机)放在不同位置对同一物体取像。采用同一批控制点(36个点)对这两台摄像机进行标定与成像误差的修正。并用已求得的两台摄像机的成像参数及成像误差修正函数去测量其它的控制点(36个点)的物方三维坐标, 以所测得的三维坐标误差大小来判断摄像机成像误差修正的效果。

成像误差的修正函数搜索, 起始阶数可定为二阶。零阶、一阶对应的是线性误差。线性误差是成像误差的主要组成部分, 但为了对成像误差进行高精度的修正, 则必须考虑二阶以上的修正项。

实验时, 采用的 CCD 摄像机为 TM-560, 图像卡为 Pcvision Plus. 确定的左摄像机成像误差修正函数的阶数为  $nu = 3n, v = 2$ , 右摄像机的成像误差修正函数阶数为  $nu = 4, nu = 3$ . 表1给出各种修正函数阶数时立体视觉系统的三维坐标测量平均误差。从中可以看出: 用  $F$  检验在统计的意义上, 能够确定最佳的修正函数阶数, 三维坐标的测量准确度大为提高。

表1

左摄像机右摄像机				点的三维坐标测量平均误差			备注
$N_u$	$N_v$	$N_u$	$N_v$	$X$	$Y$	$Z$	
2	2	2	2	0.108938	0.041905	0.276462	(2 2 3 2) 优于(2 2 2 2)
2	2	3	2	0.115849	0.045799	0.248332	(2 2 4 2) 优于(2 2 3 2)
2	2	4	2	0.109324	0.048696	0.175227	(2 2 4 3) 优于(2 2 4 2)
2	2	4	2	0.109324	0.048696	0.175227	(2 2 4 3) 优于(2 2 4 4)
2	2	4	3	0.114649	0.035227	0.180400	(2 2 4 3) 优于(2 2 5 3)
2	2	4	4	0.711043	0.032471	1.368958	因此右摄像机 定阶为(4 3)
2	2	5	3	0.277978	0.038332	0.607328	(2 2 4 3) 优于(2 3 4 3)
2	3	4	3	0.130201	0.076777	0.249755	(3 2 4 3) 优于(2 2 4 2)
3	2	4	3	0.108384	0.040326	0.171024	(3 2 4 3) 优于(3 3 4 3)
3	3	4	3	0.123176	0.028963	0.192277	因此左摄像机 定阶为(3 2)

## 5 结束语

从以上分析及实验结果可知:

(1) 摄像机的成像误差由系统误差与随机误差两部分叠加组成, 其影响因素多、复杂, 且因摄像机与成像系统而异。采用二元幂级数的部分和对系统误差成分进行函数逼近, 可以用于各种性态的成像误差函数。用最小二乘方法对此幂级数部分和的参数进行估计, 有抑制随机误差的效果。

(2) 两个图像坐标的误差修正函数阶数, 一般不宜取成相同数值。其最佳阶数的选择, 可以用  $F$  检验判断。

(3) 本文提出的方法, 用幂级数的部分和对成像系统函数进行逼近, 从低到高阶进行搜索, 并用  $F$  检验判断最佳阶数。这是一种程序化的成像误差修正方法, 它依靠计算机的处理能力, 无需依靠人的经验反复摸索合适的修正函数, 提高了成像误差修正的质量与效率。

## 参 考 文 献

- 1 Tsai R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses. IEEE Journal of Robotics and Automation, August 1987, RA-3(4): 323~344
- 2 Wallace A M. Industrial applications of computer vision since 1982. IEEE Proceedings, 1988, 135(3): 117~136
- 3 T Redar ce, Lucas Y. Practical implementation of vision systems in a CIM environment. Computer-Integrated Manufacturing Systems, February 1992, 5(1): 61~68
- 4 Ballard D H, Brown C. M. Computer vision. Prentice-Hill, 1982
- 5 李岳生, 黄友谦. 数值逼近. 北京: 人民教育出版社, 1978
- 6 贾沛璋, 朱征桃. 最优估计及其应用. 北京: 科学出版社, 1984
- 7 甘仞初. 动态数据的统计分析. 北京: 北京理工大学出版社, 1991

(责任编辑 卢天赋)