

G^2 —连续的保凸二次 B zier 插值样条*

方 遼

闵小平

(国防科技大学)

(长沙大学)

摘 要 保凸插值样条曲线是计算机图形学与计算机辅助设计中的一种重要的曲线拟合方法。本文引入二次 B zier 曲线偶, 构造了一条保凸二次 B zier 插值曲线。此插值曲线具有二阶几何连续性, 局部可调性, 且结构简单, 几何意义明显, 用户修改方便。

关键词 计算几何, B zier 曲线, 插值样条

分类号 O242.2

Convexity Preserving Quadratic B zier Interpolation of Spline Curve

Fang Kui

Ming Xiao Ping

(National University of Defense Technology) (Changsha University)

Abstract In this paper, a dual quadratic B zier curve is introduced, and a G^2 -Continuous convexity preserving quadratic B zier interpolation spline is derived. The curve is order 2 geometrical continuous, adjustable.

Key words computational geometry, B zier curve, interpolation spline curve

B zier 方法已成为计算机辅助几何设计(简记 CAGD)中重要的数学方法, 二次和三次 B zier 曲线是 B zier 方法的两种常用曲线。但是, B zier 曲线存在两个缺点, 一是曲线的次数随控制顶点的增加而增大, 二是曲线缺乏局部性且远离控制多边形。为了避免曲线的这种局限性, 于是产生了分段光滑连接的低次 B zier 复合曲线, 常用的是分段二次和三次曲线, 我们称这种曲线为 B zier 样条曲线。特别当 B zier 曲线通过一组给定的有序点列时, 称该曲线为 B zier 插值样条曲线。在曲线设计中, 经常遇到这样一个问题: 当给定的插值点是凸的, 即构成一个凸多边形, 则要求插值曲线也是凸的, 这称为保凸插值问题, 许多作者从不同的角度构造了保凸三次 B zier 插值样条, 他们要么是曲线不能局

* 1996年2月27日收稿

部修改^[1], 要么是必须求解多个四次的代数方程, 使问题变得复杂^[2-3]。

本文引入双二次 B zier 曲线偶构造了一条 G^2 连续的保凸二次 B zier 插值样条曲线, 由于二次 B zier 曲线是一段抛物线, 所以这类插值样条可以直接用于配有正抛物线插补功能的绘图机或数控机床, 而不需要进行绘图和数控加工中的所谓“后置”处理过程, 并且光滑度比目前普遍采用作“后置”处理的双圆弧拟合高。因此, 这种曲线有着比三次 B zier 插值样条曲线更多的优越性和应用前景。设 V_0, V_1, \dots, V_n 是平面上有序点列, 用直线段分别连接相邻两点构成一凸的控制多边形, 记为 V_0, V_1, \dots, V_n , 若 $V_0 = V_n$, 则该控制多边形是闭的, 如图1所示。我们的目的是找到一曲线 $R(t)$, 使它过每一型值点 V_i , 且 $R(t)$ 与控制多边形有相同的凸性。

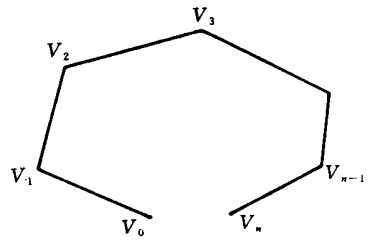


图1

1 曲线 $R(t)$ 在 V_i 处切矢的选取

首先定义多边形 V_0, V_1, \dots, V_n 的边矢如下:

$$a_i = V_i - V_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则 $R(t)$ 在 V_i 处的切矢定义为

$$\begin{cases} T_0 = t_0 a_1 + (1 - t_0)(-a_2), \\ T_i = t_i a_i = (1 - t_i) a_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ T_n = t_n a_n + (1 - t_n)(-a_{n-1}) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $0 < t_i < 1$ 是切矢调节参数, 用户修改曲线时用来调整曲线在插值点处的切矢方向。

若构造的多边形 V_0, V_1, \dots, V_n 是闭的, 则 T_0, T_n 可定义为

$$T_0 = T_n = t_0 a_1 + (1 - t_0)(-a_2) \quad (2)$$

2 双二次 B zier 曲线偶

由于 V_0, V_1, \dots, V_n 是凸的, 根据 V_i 处切矢的选取, 我们知道, 过相邻两点 V_{i-1}, V_i 处分别以 T_{i-1}, T_i 为切矢的切线必相交, 且交点为

$$Q_i = V_{i-1} + \frac{a_i \times T_i}{T_i \times T_{i-1}} T_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

易知 Q_i 在多边形 V_0, V_1, \dots, V_n 的外侧, 且新的多边形 $V_0, Q_1, V_1, \dots, V_{n-1}, Q_n, V_n$ 仍然是凸的。我们在 V_{i-1}, V_i 之间构造一段双二次 B zier 曲线偶 $R_i(t) = \{R_{i1}(t), R_{i2}(t)\}$, $0 \leq t \leq 1$ 。 $R_{i1}(t), R_{i2}(t)$ 都是二次 B zier 曲线段, $R_{i1}(t)$ 与 $R_{i2}(t)$ 是 G^2 连接的, 且凸性与三角形 $V_{i-1}Q_iV_i$ 一致。因此, 我们称 $R_i(t)$ 为双二次 B zier 曲线偶。接下来我们定义这个双二次 B zier 曲线偶(见图2)。令:

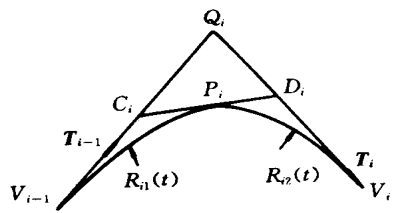


图2

$$\begin{cases} C_i = \lambda V_{i-1} + (1 - \lambda) Q_i \\ D_i = \lambda V_i + (1 - \lambda) Q_i \\ P_i = li C_i + (1 - li) D_i \end{cases} \quad (4)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$, $0 < \lambda$, $li < 1$ 是待定常数。

设 $R_{i1}(t)$, $R_{i2}(t)$ 的 Bzier 点分别是 b_{ij}^k ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2$), 则定义

$$\begin{cases} b_{i0}^1 = V_{i-1}, b_{i1}^1 = C_i, b_{i2}^1 = P_i \\ b_{i0}^2 = P_i, b_{i1}^2 = D_i, b_{i2}^2 = V_i \end{cases} \quad (5)$$

于是双二次 Bzier 曲线偶为

$$R_i(t) : \begin{cases} R_{i1}(t) = \sum_{j=0}^2 b_{ij}^1 B_{j,2}(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ R_{i2}(t) = \sum_{j=0}^2 b_{ij}^2 B_{j,2}(t), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

式中 $B_{j,2}(t) = C_2^j t^j (1-t)^{2-j}$ 是二次 Bernstein 基函数。设由双二次 Bzier 曲线偶 $R_i(t)$ 组成一条复合曲线 $R(t)$, 由构造的方法易知 $R(t)$ 是 C^1 连续的和保凸的。我们期望 $R(t)$ 是一条具有二阶几何连续的保凸插值样条曲线。

3 $R(t)$ G^2 连续的证明

根据 (5)、(6) 式及 Bzier 曲线的端点性质^[3], 求得:

$$\begin{aligned} R_{i1}(t) &= -2(1-t)V_{i-1} + 2(1-2t)C_i + 2tP_i \\ R_{i1}(t) &= 2V_{i-1} - 4C_i + 2P_i \\ R_{i2}(t) &= -2(1-t)P_i + 2(1-2t)D_i + 2tV_i \\ R_{i2}(t) &= 2P_i - 4D_i + 2V_i \end{aligned}$$

从而可得:

$$\begin{aligned} R_{i1}(0) &= 2\overrightarrow{V_{i-1}}C_i = 2(1-\lambda)\overrightarrow{V_{i-1}}Q_i \\ R_{i1}(0) &= 2\lambda(1-li)\mathbf{a}_i - R_{i1}(0) \\ R_{i1}(1) &= 2\overrightarrow{C_i}P_i = 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{a}_i \\ R_{i1}(1) &= R_{i1}(1) - (1-\lambda)\overrightarrow{V_{i-1}}Q_i \end{aligned} \quad (7)$$

同理有

$$\begin{cases} R_{i2}(0) = 2li\lambda\mathbf{a}_i \\ R_{i2}(0) = 2(1-\lambda)\overrightarrow{Q_i}V_i - R_{i2}(0) \\ R_{i2}(1) = 2(1-\lambda)\overrightarrow{Q_i}V_i \\ R_{i2}(1) = R_{i2}(1) - 2li\lambda\mathbf{a}_i \end{cases} \quad (8)$$

于是易得 $R_i(t)$ 在 V_{i-1} , V_i 处的曲率矢:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i(0) = \frac{R_{i1}(0) \times R_{i1}(0)}{R_{i1}(0)^3} = \frac{\lambda(1-li)(\overrightarrow{V_{i-1}}Q_i \times \mathbf{a}_i)}{2(1-\lambda)^2 \overrightarrow{V_{i-1}}Q_i^3} \\ \mathbf{K}_i(1) = \frac{R_{i2}(1) \times R_{i2}(1)}{R_{i2}(1)^3} = \frac{li\lambda(\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_i}V_i)}{2(1-\lambda)^2 \overrightarrow{Q_i}V_i^3} \end{cases} \quad (9)$$

而 $R_i(t)$ 在其内部 G^2 连续的充要条件是在连接点处有相同的曲率矢, 由 (7) 式和 (8) 式代入曲率矢公式得:

$$\frac{(1-\lambda)\overrightarrow{V_{i-1}Q_i} \times \mathbf{a}_i}{2\lambda^2(1-l_i)^2 \mathbf{a}_i^3} = \frac{(1-\lambda)\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_iV_i}}{2l_i\lambda^2 \mathbf{a}_i^3}$$

由于矢量 $\overrightarrow{Q_{i-1}Q_i} \times \mathbf{a}_i$ 与 $\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_iV_i}$ 同向, 故上式等价于

$$\frac{1}{(1-l_i)^2} = \frac{1}{l_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

求解 l_i 得:

$$l_i = 1/2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

从上式可知: 只有选取 $l_i = 1/2$ 才能保证 $R_i(t)$ 在其内部是 G^2 连续的, 要使 $R_i(t)$ 与 V_0, V_1, \dots, V_n 的凸性一致, 还必须满足条件: $0 < \lambda < 1$, 下面由 $R(t)$ 的 G^2 连续性来选取满足上述条件的 λ .

上面已经证明了双二次 Bzier 曲线偶内部是 G^2 连续的. 因此要证明 $R(t)$ 是 G^2 连续的充要条件是 $R_i(t)$ 与 $R_{i+1}(t)$ 在连续点 V_i 处有相同的曲率矢, 即

$$\mathbf{K}_{i+1}(0) = \mathbf{K}_i(1), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

将(9)式代入(11)式得到:

$$\frac{\lambda_{i+1}(1-l_{i+1})\overrightarrow{V_iQ_{i+1}} \times \mathbf{a}_{i+1}}{2(1-\lambda_{i+1})\overrightarrow{V_iQ_{i+1}}^3} = \frac{l_i\lambda\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_iV_i}}{2(1-\lambda)\overrightarrow{Q_iV_i}^3} \quad (12)$$

从图1知: $\overrightarrow{V_iQ_{i+1}} \times \mathbf{a}_{i+1}$ 与 $\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_iV_i}$ 同向, 故上式等价于

$$\frac{\lambda_{i+1}(1-l_{i+1})}{2(1-\lambda_{i+1})} \frac{\overrightarrow{V_iQ_{i+1}} \times \mathbf{a}_{i+1}}{\overrightarrow{V_iQ_{i+1}}^3} = \frac{l_i\lambda}{(1-\lambda)^2} \frac{\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_iV_i}}{\overrightarrow{Q_iV_i}^3} \quad (13)$$

令

$$A_i = \frac{\mathbf{a}_i \times \overrightarrow{Q_iV_i}}{\overrightarrow{Q_iV_i}^3}, \quad B_i = \frac{\overrightarrow{V_iQ_{i+1}} \times \mathbf{a}_{i+1}}{\overrightarrow{V_iQ_{i+1}}^3}$$

则(13)式化为

$$\frac{\lambda_{i+1}}{(1-\lambda_{i+1})^2} B_i = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

求解舍去负根得:

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} = \frac{2}{k_i(k_i^2 - 4)1/2} \\ k_i = 2 + \frac{(1-\lambda)^2 B_i}{\lambda A_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (14)$$

上式是 λ_i 的递推公式, 只要选取初始的 $0 < \lambda_1 < 1$, 则由(14)式可递推求得 $0 < \lambda_{i+1} < 1 (i = 1, 2, \dots, n-1)$. 到此我们已经证明了 $R(t)$ 是 G^2 连续的和保凸的.

如果 $V_0 = V_n$, 则需要构造闭曲线, 而闭曲线 $R(t)$ 在 V_0 处一般是 C^1 连续的, 若要使它达到 G^2 连续, 则可用迭代法求解非线性方程组(12)求得所有的 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 也可用增加一个型值点的方法解决. 这里不详细讨论.

4 计算步骤

(1) 计算边矢

For $i \leftarrow 1$ to n do

$\mathbf{a}_i = V_i - V_{i-1}$

(2) 从(1)式计算切矢

if ($V_0 = V_n$) then

$$T_0 = T_n = t^0 \mathbf{a}^1 + (1 - t^0)(-\mathbf{a}^i)$$

else

$$T_0 = t^0 \mathbf{a}^1 + (1 - t^0)(-\mathbf{a}^2),$$

$$T_n = t^n \mathbf{a}^n + (1 - t^n)(-\mathbf{a}^{n-1}),$$

for $i = 1$ to $n - 1$ do

$$T_i = t^i \mathbf{a}^{i+1} + (1 - t^i) \mathbf{a}^{i+1};$$

(3) 由(3)式计算 Q_i

for $i = 1$ to n do

$$Q_i = V_{i-1} + \frac{\mathbf{a}_i \times T_i}{T_{i-1} \times T_i} T_{i-1};$$

(4) 从(13)式计算 A_i, B_i

for $i = 1$ to $n - 1$ do

$$A_i = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}_i \times Q_i V_i}}{Q_i V_i^3}, \quad B_i = \frac{\overrightarrow{Q_i V_{i+1} \times \mathbf{a}_i}}{V_i Q_{i+1}^3};$$

(5) 从(14)式计算 λ_i , (11)式计算 l_i

置初值 $\lambda_i (0, 1)$

for $i = 1$ to $n - 1$ do

$$k_i = 2 + \frac{(1 - \lambda_i)^2 B_i}{\lambda_i A_i}, \quad \lambda_{i+1} = \frac{2}{k_i + (k_i^2 - 4)^{1/4}}$$

for $i = 1$ to n do

$$l_i = 1/2$$

(6) 从(4)式, (5)式计算出所有 Bzier 点;

(7) 从(6)式画图, 结束。

例 给定八个有序点列 V_0, V_1, \dots, V_8 构成一凸的闭多边形, 用本文的算法绘制了一条 G^2 连续的保凸闭曲线, 如图3所示。

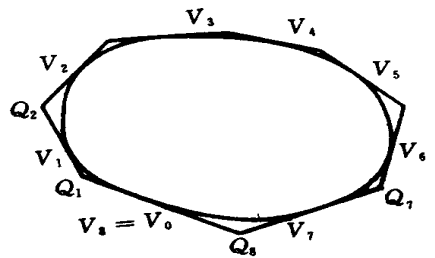


图3

参 考 文 献

- 1 Melanghlin H W. Shape preserving Interpolation, an algorithm. IEEE Comp. Graphics Appl., 1983, (3): 58 ~ 67
- 2 苏步青等. 计算几何. 上海科技出版社, 1983
- 3 方遼. G连续的保凸插值三次 Bzier 样条曲线. 计算机辅助设计与图形学学报, 1994, 6(4): 277 ~ 282
- 4 Goodman T N T. Shape preserving interpolation by Curvature Continuous Parametric Curves. CAGD, 1988, 5(5): 303 ~ 314
- 5 李福生. 数控机床程序编制—自动编程. 机械工业出版社, 1982

(责任编辑 卢天贶)