国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第1期 1997年2月 Vol. 19 No. 1

取值于p型Banach空间随机变量列的收敛性*

李 兵

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文将W.F.Stout[1]关于实值随机变量列的收敛性的一些结果，推广到了p型Banach空间值情形上，得到了刻划p型Banach空间的二个充分必要条件及二个必要条件。

关键词 p型Bananh空间，几乎处处收敛
分类号 O186.14

Almost Sure Convergence for Random Variables with Getting Value from p- type Banach Spaces

Li Bing

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we generalize some results of W. F. Stout about almost sure convergence for real- valued random variables, and obtain some results about almost sure convergence for random variables with getting value from p- type Banach spaces, that is, we obtain two sufficent and necessary conditions and two necessary conditions for p- type Banach spaces.

Key words p- type Banach space, almost sure convergence

p型Banach空间是具有很好的几何性质的一类Banach空间。通过对取值于p型Banach随机变量的研究，可以得出此类空间的一些刻划及性质。

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一给定的概率空间，E为给定的Banach空间，称$X: \Omega \to E$是一随机变量（或随机元），若X关于$\mathscr{F}$是强可测的。X的数学期望及条件数学期望均为关于P在强积分（Bochner积分）意义下取得的。关于这方面的具体定义参见文[2]。

下面给出p型Banach空间的定义

定义1[3] 称Banach空间E是p型的$(1< p \leq 2)$，若存在常数$C>0$，使得对一切n

* 1995年10月24日收稿

$\in N$, 有

$$b_n^{(p)} \triangleq \inf\left\{ b \in R^+ : \forall\, x_1, \cdots, x_n \in E,\ \left(E \ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \ ^p\right)^{1/p} \le b \left(\sum_{i=1}^{n} \ x_i \ ^p\right)^{1/p} \right\}$$

$$\le C < \infty$$

其中$(r_n, n \ge 1)$为 Bernoulli 序列, 即$(r_n, n \ge 1)$是独立同分布的随机变量列, 且 $P(r_n = 1) = P(r_n = -1) = \frac{1}{2}, (n \ge 1)$.

关于p 型 Banach 空间的刻划已有如下结果。

引理1[3] 设 E 为 Banach 空间, 以下陈述等价: (1) E 是 p 型的$(1 < p \le 2)$; (2) 对于任何零均值的 E 值独立随机变量(X_i), 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} E\Phi_p(\ X_i \ )$ 收敛(其中 $\Phi_p(t) \triangleq \min(t^p, t)$, $\forall\, t \ge 0, 1 < p \le 2$), 则级数$\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ a. s. 收敛 。

以下应用引理1得到本文的一些主要结果。

定理1 设 E 为 Banach 空间, $1 < p \le 2$, 以下陈述等价:

(1) E 是p 型的。

(2) 设(X_n)为零均值的 E 值独立随机变量列, $\Phi_n: R^+ \to R^+$ 为连续函数, 且 $\Phi_n(t)/t$ 及 $t^p/\Phi_n(t)$ 关于 t 非降$(n = 1, 2, \cdots)$, (α_n)为实数列。若有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\Phi_n(\ X_n \ )}{\Phi_n(\alpha_n)} < \infty$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a. s 收敛。

证明 $(1) \Rightarrow (2)$。设 E 是 p 型的, 若有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\Phi_n(\ X_n \ )}{\Phi_n(\alpha_n)} < \infty$$

往证$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a. s 收敛。

令 $u_n(t) = \Phi_n(\alpha_n t)\Phi_n^{-1}(\alpha_n), (n = 1, 2, \cdots, t > 0)$, 则由假设知: $u_n(1) = 1$, $u_n(t)/t$ 及 $t^p/u_n(t)$ 关于 t 非降, 从而有$\frac{u_n(t)}{t} \ge 1$ $(\forall\, t \ge 1)$及$\frac{t^p}{u_n(t)} \le 1$ $(\forall\, 0 < t \le 1)$。即 $u_n(t) \ge \Phi_p(t)$ $(\forall\, t > 0)$, 故由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\Phi_n(\ X_n \ )}{\Phi_n(\alpha_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} E u_n\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right) < \infty$。可知$\sum_{n=1}^{\infty} E\Phi_p\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right) < \infty$; 而$E$ 是 p 型的, 则由引理 1 知: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a. s. 收敛。

$(2) \Rightarrow (1)$。对于任何零均值的 E 值独立随机变量列(X_n), 若 $\sum_{n=1}^{\infty} E\Phi_p(\ X_n \ ) < \infty$, 往证$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a. s. 收敛。令 $\Phi_n(t) \equiv \Phi_p(t), \alpha_n \equiv 1, (n = 1, 2, \cdots)$, 则知 Φ_n 满足(2) 中条件, 且$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\Phi_n(\ X_n \ )}{\Phi_n(\alpha_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\Phi_p(\ X_n \ )}{\Phi_p(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} E\Phi_p(\ X_n \ ) < \infty$, 故由(2) 知: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, a. s. 收敛。

定理**2**　设 E 为 Banach 空间，$1< p\leq 2$，以下陈述等价：

(1) E 是 p 型的。

(2) 设(X_n)为零均值的 E 值独立随机变量列，Φ_n：$R^+\to R^+$ 为连续的凸函数，且 $\Phi_n(t)/t$ 及 $t^p/\Phi_n(t)$ 关于 t 非降($n=1,2,\cdots$)，(α_n)为实数列，若有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\Phi_n(\ X_n\ )}{\Phi_n(\ X_n\ )+\Phi_n(\alpha_n)}\right)<\infty$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a. s. 收敛。

证明　$(1)\Rightarrow(2)$。设 E 是 p 型的，令 $Z_n=X_nI(\ X_n\ <\alpha_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，则易得不等式：

$$\frac{E\Phi_n(\ Z_n\ )}{2\Phi_n(\alpha_n)}+\frac{1}{2}P(\ X_n\ \geq\alpha_n)\leq E\left(\frac{\Phi_n(\ X_n\ )}{\Phi_n(\ X_n\ )+\Phi_n(\alpha_n)}\right)\qquad(2.1)$$

事实上，只需分两种情形讨论：¹ $X_n(w)\ <\alpha_n$，④ $X_n(w)\ \geq\alpha_n$。即可得

$$\frac{\Phi_n(\ Z_n(w)\ )}{2\Phi_n(\alpha_n)}+\frac{1}{2}I_{(\ X_n\ >\alpha_n)}(w)\leq\frac{\Phi_n(\ X_n(w)\ )}{\Phi_n(\ X_n(w)\ )+\Phi_n(\alpha_n)}$$

这样，若有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\Phi_n(\ X_n\ )}{\Phi_n(\ X_n\ )+\Phi_n(\alpha_n)}\right)<\infty$$

则由(2.1)便有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n\neq Z_n)<\infty\qquad(2.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\Phi_n(\ Z_n\ )}{\Phi_n(\alpha_n)}<\infty\qquad(2.3)$$

另外，我们还有

$$\Phi_p(t+s)\leq K(\Phi_p(t)+\Phi_p(s))\quad(\forall t,s>0)\qquad(2.4)$$

其中 K 为某常数。

下面证明(2.4)：¹ 若 $t+s\leq 1$，则(2.4)可由 R^+ 上函数 $f(t)=\frac{(1+t)^p}{1+t^p}$ 导出；④若 $t+s>1$，$0<t$，$s\leq 1$，则(2.4)可由不等式：$\frac{t+s}{t^p+s^p}\leq\frac{2}{t^p-(1-t)^p}<2$ 得出。㈣若 $t+s>1$，$t>1, s<1$，则(2.4)可由不等式 $\frac{t+s}{t+s^p}\leq\frac{t+1}{t}\leq 2$ 导出。

这样由(2.4)、Φ_n 的凸性以及不等式：$\Phi_n(\alpha_n t)/\Phi_n(\alpha_n)\geq\Phi_p(t)$（参见定理1的证明），有

$$\begin{aligned}E\Phi_p(\ Z_n-EZ_n\ \alpha_n^{-1})&\leq K[E\Phi_p(\ Z_n\ \alpha_n^{-1})+\Phi_p(E\ Z_n\ \alpha_n^{-1})]\\&\leq K\left[\frac{E\Phi_n(\ Z_n\ )}{\Phi_n(\alpha_n)}+\frac{\Phi_n(E\ Z_n\ )}{\Phi_n(\alpha_n)}\right]\\&\overset{\text{Jensen}}{\leq} 2K(\Phi_n(\alpha_n))^{-1}E\Phi_n(\ Z_n\ )\end{aligned}$$

从而由(2.3)知，$\sum_{n=1}^{\infty} E\Phi_{p}(Z_n - EZ_n \alpha_n^{-1}) < \infty$；再由$(Z_n - EZ_n)$ 独立、零均值以及定理 1 知，$\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n - EZ_n)/\alpha_n$ a.s.收敛。另外由(2) 及Borel－ Cantelli 引理知：$P(Zn \neq X_n$, i.o) = 0，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a.s.收敛。

(2)⇒(1)。若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\Phi_n(X_n)}{\Phi_n(\alpha_n)} < \infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{\Phi_n(X_n)}{\Phi_n(X_n) + \Phi_n(\alpha_n)}\right) < \infty$。由(2) 有，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a.s.收敛，从而由定理 1 知：E 是 p 型的。

定理3 设 E 是p 型 Banach 空间($1< p\leq 2$)，(Xn)为 E 值对称的独立同分布随机变量列，$\Phi: R^{+} \to R^{+}$ 为连续凸函数，且 $\Phi(t)/t$ 及 $t^{p}/\Phi(t)$ 关于 t 非降，(α_n) 为实数列，$0<\alpha_n \uparrow \infty$。若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Phi(\alpha_k)} = O\left(\frac{n}{\Phi(t_n)}\right) \tag{3.1}$$

则以下条件等价：

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_1 > \alpha_n) < \infty \tag{3.2}$$

(2) $$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{\infty}X_i \to 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.3}$$

证明 (1)⇒(2)。设(3.2)成立，令$Z_n= X_n I(X_n < \alpha_n)$ $(n= 1,2,\cdots)$，约记$\alpha_0= 0$，则由(3.1)，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\Phi(Z_n)}{\Phi(\alpha_n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\Phi(X_1](X_1 < \alpha_n)}{\Phi(\alpha_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Phi(\alpha_n)}\sum_{n=1}^{\infty}E\Phi(X_1](\alpha_{k-1} \leq X_1 < \alpha_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}E\Phi(X_1 I(\alpha_{k-1} \leq X_1 < \alpha_k))\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\Phi(\alpha_n)} \\ &\overset{3.1}{\leq} K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\Phi(\alpha_n)}E\Phi(X_1 I(\alpha_{k-1} \leq X_1 < \alpha_k))\end{aligned}$$

而 $\Phi(t)/t$ 关于 t 单调非降，可知：当 $\alpha_{k-1} \leq X_1(w) < \alpha_k$ 时，有$\frac{\Phi(X_1(w))}{X_1(w)} \leq \frac{\Phi(\alpha_k)}{\alpha_k}$，从而 $\Phi(X_1(w)) \leq \Phi(\alpha_k)$，再注意到$\alpha_k> 0$，则 $\Phi(0) \leq \Phi(\alpha_k)$，所以恒有

$$\Phi(X_1(w)) I(\alpha_{k-1} \leq X_1(w) < \alpha_k)) \leq \Phi(\alpha_k) I(\alpha_{k-1} \leq X_1(w) < \alpha_k)$$

从而

$$\frac{1}{\Phi(\alpha_n)}E(\Phi(X_1](\alpha_{k-1} \leq X_1 < \alpha_k)) \leq P(\alpha_{k-1} \leq X_1 < \alpha_k)$$

这样接前式并由(3.2)式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(Z_n)}{\Phi(\alpha_n)} \leq K\sum_{n=1}^{\infty}kP(\alpha_{k-1} \leq X_1 < \alpha_k)$$

$$= K\sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 > \alpha_k) < \infty$$

通过此式以及同定理2证明完全类似，我们可得 $\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n - EZ_n)/\alpha_n$ a.s.收敛，而由(X_n)的结称性，有

$$EZ_n = E(X_n I(X_n < \alpha_n)) = E(-X_n I(-X_n < \alpha_n)) = -EZ_n$$

即 $EZ_n = 0$。再注意到 $P(Xn \neq Z_n, \text{ i.o}) = 0$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\alpha_n}\right)$ a.s. 收敛。最后，由 Kronecker 引理(参见[4], P217) 便得 $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ a.s. 。

(2)⇒(1)。设(3.3)成立，则

$$\frac{X_n}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\ \frac{1}{\alpha_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} X_i \to 0 \quad a.s.$$

反设 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 \geq \alpha_n) = \infty$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq \alpha_n) = \infty$，由 Borel - Cantelli 引理知：$P(X_n \geq \alpha_n, \text{ i.o}) = 1$。这与上式矛盾，故(3.2)式成立。

定理4 设E 是p 型 Banach 空间$(1< p \leq 2)$，(X_n)为零均值的E 值独立同分布随机变量列，$\Phi: R^{+} \to R^{+}$ 为连续凸函数，且 $\Phi(t)/t$ 及 $t^{p}/\Phi(t)$ 关于 t 非降，(α_n) 为实数列，$0<\alpha_n \uparrow \infty$，且 $\alpha_k/\alpha_n \leq Ck/n$，$(\forall\, k \geq n)$ 及 $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\Phi(\alpha_k)} = O\left(\frac{n}{\Phi(\alpha_n)}\right)$，$(\forall\, n)$。若有 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 \geq \alpha_n) < \infty$，则 $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ a.s.

证明 同定理3(1)⇒(2)的前半部分一样，我们可得：$\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n - EZ_n)/\alpha_n$ a.s.收敛。由 Kronecker 引理及 $P(X_n \neq Z_n, \text{ i.o}) = 0$ 还进一步可得到：$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EZ_k) \to 0$ a.s，故为证明本定理，只需证明：$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n} EZ_k \to 0$，即可。

由 $EX_n = 0(\forall\, n)$，及(X_n)的独立同分布有

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} EZ_k \\
&= \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(X_k - Z_k) \leq \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\ X_k - Z_k \\
&= \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(X_k\ I(X_k \geq \alpha_k)) = \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(X_1\ I(X_1 \geq \alpha_k)) \\
&\leq \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k}^{\infty} E(X_1\ I(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1})) \\
&= \alpha_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k}^{n} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} \right) E(X_1\ I(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1})) \\
&= \alpha_n^{-1} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \right) E(X_1\ I(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}))
\end{aligned}
$$

$$= \alpha_n^{-1}\sum_{m=1}^{n} mE(X_1 I(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}))$$

$$+ \alpha_n^{-1}\sum_{m=n+1}^{\infty} nE((X_1 I(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}))$$

$$\leq \alpha_n^{-1}\sum_{m=1}^{n} m\alpha_{m+1}P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}))$$

$$+ \alpha_n^{-1}\sum_{m=n+1}^{\infty} n\alpha_{m+1}P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}) \qquad (4.1)$$

然而 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\alpha_{m+1}}{\alpha_m}P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}) \leq C\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1})$

$$= C\sum_{m=0}^{\infty}P(X_1 \geq \alpha_m) < \infty$$

故由Kronecker 引理知: $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{n} m\alpha_{m+1}P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}) \to 0$, 另一方面, 由$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{m+1}) < \infty$, 还知:

$$\alpha_n^{-1}\sum_{m=n+1}^{\infty} n\alpha_{m+1}P(\alpha_n \leq X_1 < \alpha_{n+1})$$

$$\leq C\sum_{m=n+1}^{\infty}(m+1)P(\alpha_m \leq X_1 < \alpha_{n+1}) \to 0$$

即(4.1)右边, 当 $n\to\infty$时趋于0, 这样, 我们便证明了: $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n}EZ_k \to 0$。(证毕)

参 考 文 献

1 W.F.Stout. Almost Sure Convergence. Academic Press, New York, 1974

2 胡迪鹤. 随机过程概论. 武汉大学出版社, 1986

3 Linder strass J, Tzafrir L· Classical Banach Spaces, Spring- Verlag, 1979

4 刘培德. 鞅与 Banach 空间几何学. 武汉大学出版社, 1993

(责任编辑　潘　生)