国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第1期　　1997年2月　　Vol. 19 No. 1

拟共形映照的两个偏差性质*

周海银　　　褚玉明

(国防科技大学)　　(湖南师范大学)

摘　要　本文得到了 n 维空间中的度量 K_D 和 J_D 在 $K-$ 拟共形映照下的偏差估计，并且偏差的系数只与 K 有关而与维数 n 无关。

关键词　拟共形映照，偏差，测地线，拟双曲度量

分类号　O174. 55

Two Distortion Propertics For Quasiconformal Mappings

Zhou Haiying
(National Univ. of Defense Tech., Changsha 410073)
Chu Yuming
(Dept. of Math., Hunan Norinal University)

Abstract　In this paper, we obtained the distortion estimates for metric K_D and J_D under K− quasiconformal mappings, and proved the distortion coefficient only dependent on K.

Key words　Quasiconformal mappigs, Distortion, Geodesic, Quasihyperbolic metric

众所周知，平面单连通区域上的双曲度量是共形不变的，它是研究平面共形映照理论的重要工作。对于空间，由于没有黎曼映照定理，因此对于空间一般的单连通区域也无法象平面那样定义其上的双曲度量。为此，F. W. Cehring 和 B. P. Palka 在文[1]中引入了拟双曲度量的概念。

设 D 是 $R^n(n\geq 2)$ 中的任一真子域，对任意 $x_1, x_2\in D$，在 D 中 x_1与 x_2之间的拟双曲距离 $K_D(x_1, x_2)$ 定义为

$$K_D(x_1, x_2) = \inf_{\gamma}\int_{\gamma} d(x, \partial D)^{-1}\mathrm{d}S \tag{1}$$

(1) 中的下确界是对 D 中所有连结 x_1和 x_2的可求长曲线 γ 所取。称达到(1)中的下确界的曲线 γ 为 D 中连结 x_1、x_2的拟双曲测地线。

* 1996年10月16日修订

与拟双曲度量 $K_D(x_1,x_2)$ 有着重要联系的另一个度量 $J_D(x_1,x_2)$ 定义为

$$J_D(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{|x_1-x_2|}{d(x_1,\partial D)}\right)\left(1+\frac{|x_1-x_2|}{d(x_2,\partial D)}\right) \qquad (2)$$

度量 K_D 和 J_D 是研究高维拟共形映照[2][3] 和 BMO 理论[4] 的两个非常有用的工具。

F. W. Gehring 和 B. G. Osgood 在文[2]中证明了度量 K_D 和 J_D 在 n 维 K－拟共形映照下的如下两个拟不变性:

定理A 存在只与 n、K 有关的常数 $C'=C'(n,K)$，如果 f 是 D 到 D' 上的 K—拟共形映照，那么对任意 x_1，$x_2\in D$ 有

$$K_{D'}(f(x_1), f(x_2)) \leq C'\max(K_D(x_1,x_2), K_D(x_1,x_2)^{\alpha}), \quad \alpha = K^{1/(1-n)}$$

定理B 存在只与 n、K 有关的常数 $C=C(n,K)$，$d=d(n,K)$，如果 f 是域 D 到 D' 上的 K—拟共形映照，那么对任意 x_1，$x_2\in D$，有 $J_{D'}(f(x_1),f(x_2)) \leq CJ_D(x_1,x_2)+d$。

定理 A 和定理 B 中的两个不等式研究 n 维拟共形映照的性质时非常有用，例如 F. W. Gehring 和 B. G. Osgood 在文[2]中利用它们证明了一致域是拟共形映照下不变的。但是定理 A 中的系数 C 和定理 B 中的系数 C、d 都是与维数有关，且 C 和 d 关于维数 n 是无界的，因此利用它们不能研究无限维拟共形映照。在本文中我们将证明定理 A 和定理 B 中的系数在一定条件下都可以只与 K 有关而与维数 n 无关，即下面的定理1和定理2，它们对研究无限维空间中的拟共形映照有重要意义。

定理1 如果 D，D' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的真子域，$f: D\to D'$ 是 K—拟共形映照，则对任意 x_1，$x_2\in D$ 有

$$K_{D'}(f(x_1),f(x_2)) \leq \frac{4K^K}{2^{1-K}a_1^K}\max\{K_D(x_1,x_2), K_D(x_1,x_2)^{1/K}\}$$

其中 $a_1\in\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8K},\ 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8K}\right)$。

定理2 存在只与 K 有关的常数 $C=C(K)$ 和 $d=d(K)$，如果 f 是 $\overline{\mathbb{R}}^n$ 上的 K—拟共形映照，D 是 $\overline{\mathbb{R}}^n$ 中的真子域，$D'=f(D)$，那么对任意 $x_1,x_2\in D$，有 $J_{D'}(f(x_1),f(x_2)) \leq CJ_D(x_1,x_2)+d$。

2 定理的证明

在证明定理1和定理2之前，我们先引入 G. D. Anderson，M. K. Vamanamurthy 和 M. Vourinen 在文[5]中的两个结果(引理4.7和引理4.31)。它们在定理1和定理2的证明过程起了重要作用。

引理1[5] 如果 D、D' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的真子域，$f: D\to D'$ 是 K—拟共形映照，则存在常数 $a_1\in\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8K},\ 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8K}\right)$，对任意 $x\in D$，$y\in B^n(x, a_1 d(x,\partial D))$ 有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{d(f(x),\partial D')} \leq \frac{K}{2^{1/K}a_1}\left(\frac{|x-y|}{d(x,\partial D)}\right)^{a}, \quad a=K^{1/(1-n)}$$

引理2[5] 如果 f 是 $\overline{\mathbb{R}}^n$ 上的 K—拟共形映照且 $f(\infty)=\infty$，则对任意三个互不相同的有限点 x, y, z 有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)-f(z)|}+1 \leq B\left(\left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)^K+1\right)$$

其中$B=\dfrac{1}{a_1}\max\left\{2,\ \dfrac{1}{2}(\min\{2,K\})^{K}\right\}$，$a_1\in\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8K},\ 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8K}\right)$。

定理**1**的证明

固定x_1，$x_2\in D$，取$b_1=\dfrac{2^{1-K}a_1^{K}}{K^{K}}<a_1<1$，我们首先假设：$\dfrac{|x_1-x_2|}{d(x_1,\partial D)}\le b_1$

利用引理1可得

$$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{d(f(x_1),\partial D')}\le\frac{K}{2^{1/K}a_1}\left(\frac{|x-x_2|}{d(x_1,\partial D)}\right)^{n}\le\frac{K}{2^{1/K}a_1}\left(\frac{|x_1-x_2|}{d((x_1,\partial D)}\right)^{1/K}$$

$$\le\frac{K}{2^{1/K}a_1}b_1^{1/K}=\frac{1}{2}\tag{3}$$

令β为D中连结$f(x_1)$和$f(x_2)$两点的闭线段，对任意$y\in\beta$，由(3)和三角不等式可得

$$d(y,\partial D')\ge d(f(x_1),\partial D')-|f(x_1)-y|$$

$$\ge d(f(x_1),\partial D')-|f(x_1)-f(x_2)|\ge\frac{1}{2}d(f(x_1),\partial D')\tag{4}$$

由(1),(3)和(4)可得

$$K_D(f(x_1),f(x_2))\le\int_\beta\frac{ds}{d(y,\partial D')}\le\frac{2|f(x_1)-f(x_2)|}{d(f(x_1),\partial D')}\le 1\tag{5}$$

根据文[2]中的不等式(2) $K_D(x_1,x_2)\ge\log\left(1+\dfrac{|x_1-x_2|}{d(x_1,\partial D)}\right)$ (6)

及当$0<a\le 1$时，有： $\log(1+a)\ge\dfrac{1}{2}a$ (7)

可得 $K_D(x_1,x_2)\ge\dfrac{1}{2}\dfrac{|x_1-x_2|}{d(x_1,\partial D)}$ (8)

结合不等式(3),(5)和(8)可得

$$K_{D'}(f(x_1),f(x_2))\le\frac{2K}{a_1}[K_D(x_1,x_2)]^{1/K}\tag{9}$$

若$\dfrac{|x_1-x_2|}{d(x_1,\partial D)}>1$，令$\gamma$为$D$中连结$x_1$，$x_2$两点的拟双曲测地线，在$\gamma$上选取$y_1$，$y_2$，$\cdots$，$y_m$，$y_{m+1}$使得$y_1=x_1$，$y_{m+1}=x_2$，对$j=1,2,\cdots,m-1$有$|y_j-y_{j+1}|/d(y_j,\partial D)=b_1$和$|y_m-y_{m-1}|/d(y_m,\partial D)\le b_1$，利用(5)式可得

$$K_{D'}(f(x_1),f(x_2))\le\sum_{j=1}^{m}K_{D'}(f(y_j),f(y_{j+1}))\le m\tag{10}$$

而由(8)有 $$K_D(x_1,x_2)=\sum_{j=1}^{m}K_D(y_j,y_{j+1}))\ge\sum_{j=1}^{m-1}K_D(y_j,y_{j+1})$$

$$\ge\frac{m-1}{2}b_1\ge\frac{m}{4}b_1\tag{11}$$

而(10)和(11)两式有

$$K_D(f(x_1),f(x_2))\le\frac{4}{b_1}K_D(x_1,x_2)=\frac{4K^{K}}{2^{1-K}a_1^{K}}K_D(x_1,x_2)\tag{12}$$

结合(9),(12)及$4K^{K}/2^{1-K}a_1^{K}>2K/a_1$有

$$K_{D'}(f(x_1),f(x_2))\le\frac{4K^{K}}{2^{1-K}a_1^{K}}\max\{K_D(x_1,x_2)^{1/K},K_D(x_1,x_2)\}$$

定理2的证明

固定$x_1, x_2 \in D$，假设f 是$\bar{\mathbb{R}}^n$ 上的Mobius 变换，选择$x_3 \in \partial D$ 和$x_4 \in \bar{\mathbb{R}}^n / D$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_3)| = d(f(x_1), \partial D) \tag{13}$$

和$f(x_4) = \infty$，利用Mobius 变换的交比不变性可得

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_1), \partial D)} = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_1) - f(x_3)|} = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|} \frac{|x_3 - x_4|}{|x_2 - x_4|} \tag{14}$$

如果$x_4 = \infty$，那以由(14)可得

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_1), \partial D)} = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{d(x_1, \partial D)}$$

因此有
$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_1), \partial D)} + 1 \leq \left(\frac{|x_1 - x_2|}{d(x_1, \partial D)} + 1\right)\left(\frac{|x_1 - x_2|}{d(x_2, \partial D)} + 1\right) \tag{15}$$

如果$x_4 \neq \infty$，则由三角不等式可得：$|x_3 - x_4| \leq |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|$

利用(14)式有：
$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_1), \partial D)} + 1 \leq \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|} + 1\right)\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_2 - x_4|} + 1\right)$$
$$\leq \left(\frac{|x_1 - x_2|}{d(x_1, \partial D)} + 1\right)\left(\frac{|x_1 - x_2|}{d(x_2, \partial D)} + 1\right)$$

交换x_1和x_2同样有
$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_2), \partial D)} + 1 \leq \left(\frac{|x_1 - x_2|}{d(x_1, \partial D)} + 1\right)\left(\frac{|x_1 - x_2|}{d(x_2, \partial D)} + 1\right)$$

因而
$$J_{D'}(f(x_1), f(x_2)) \leq 2 J_D(x_1, x_2) \tag{16}$$

如果f 是$\bar{R}^n$ 上的K—拟共形映照且$f(\infty) = \infty$，那么选择$x_3 \in \partial D$ 使得$|f(x_1) - f(x_3)| = d(f(x_1), \partial D)$，利用引理2有

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_1), \partial D)} + 1 \leq B\left[\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|}\right)^K + 1\right] \leq B\left(\frac{|x_1 - x_2|}{d((x_1, \partial D)} + 1\right)^K$$

同样可证
$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(f(x_2), \partial D)} + 1 \leq B\left(\frac{|x_1 - x_2|}{d((x_2, \partial D)} + 1\right)^K$$

因此有
$$J_{D'}(f(x_1), f(x_2)) \leq K J_D(x_1, x_2) + \log B \tag{17}$$

对于$\bar{\mathbb{R}}^n$ 上一般的K—拟共形照f，我们可以分解$f = g \circ h$，h 是$\bar{\mathbb{R}}$ 上的Mobius 变换，g 是$\bar{\mathbb{R}}$ 上的K—拟共形映照且$g(\infty) = \infty$。利用(16)和(17)可得定理2，其中$C = 2K$，$d = \log B$，$B = \frac{1}{a_1}\max\{2, \frac{1}{2}(\min\{2, K\})^K\}$，$a_1 \in (\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{8K}, 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{8K})$，定理2得证。

参 考 文 献

1 Gehring F W, Palak B P. Quasiconformal homogeneous domains. J. Analyse Math. 1976, 30: 172～199

2 Gehring F W, Osgood B G. Uniform and the quasihyperbolic metric, J Analyse Msth. 1979, 36: 50～74

3 Gehring F W, Hag K, Martio O. The quasinyperbdic metric in John domains. Math. Scand. 1989, 65: 75～92

4 Jones P W. Extension theorems for BMO. Indiana univ. Math. J, 1980, 29: 41～66

5 Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Sharp distortion theorems for quasiconformal mapings. Trans. Amer. Math. Aoc, 1988, 305: 95～111

(责任编辑　潘　生)