

三点弯曲梁的动态断裂分析*

唐国金 周建平

(国防科学技术大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 利用梁的初等弯曲理论和线弹簧模型建立了三点弯曲裂纹梁的动态断裂分析方法,该方法使计算大为简化。数值结果表明该方法具有足够的精度。

关键词 动态断裂, 三点弯曲梁, 线弹簧模型

分类号 O 39, TB12

Analysis of Dynamic Fracture of Three-Point Bending Beam

Tang Guojin and Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, a new method of dynamic fracture analysis of three-point bending beam with an edge crack is presented by applying the elementary bending theory of beam and the line-spring model. This method can simplify calculation, and the numerical results show that it has high precision.

Key words dynamic fracture, three-point bending beam, line-spring model

材料的动态断裂韧性 K_{II} 是确定结构在动载作用下的完整性的重要参数。三点弯曲实验是确定材料断裂韧性 K_{II} 的常用实验,但要求计算三点弯曲梁的动态应力强度因子 K_I 。用二维有限元计算 K_I 需要较大的计算机内存和运行时间,不适于实验数据的快速处理。

1976 年 Freund^[1] 等用线弹簧模型进行了纯弯无限长裂纹梁的线弹性动态断裂分析,但未考虑轴向力的影响。1977 年 Adeli^[2] 等对同一课题进一步考虑了轴向力的影响。1991 年 Miyazaki^[3] 用线弹簧模型和一维有限元对三点弯曲和四点弯曲梁的线弹性动态断裂进行了研究。以上研究表明线弹簧模型用于梁的动态断裂分析具有足够的精度。本文用线

* 国家自然科学基金资助项目

1996 年 9 月 20 日收稿

弹簧模型将二维问题转化为一维问题的组合, 并利用梁的初等弯曲理论导出了三点弯曲梁的全局方程, 从而使问题的控制方程成为一组易于求解的常微分方程组, 彻底摆脱了有限元, 在普通 386 微机上仅需几秒钟就能算出应力强度因子 K_I 。

1 模型

如图 1 所示, 考虑一个受集中快速载荷 $P(t) = P_0 \frac{t}{t_0}$ 作用的简支梁, 梁跨度中部有一深度为 a 的裂纹。裂纹的存在使局部小区域上梁的刚度削弱, 由于该局部小区段相对于梁长度甚小, 故可认为梁的挠度斜率和轴向位移在该处发生间断。因而, 可以认为梁中部有一长度为零但可以变形(相对轴向位移和相对转角)的广义线弹簧, 而线弹簧的本构关系, 即轴向位移间断量 Δ 和挠度斜率间断量 θ 与相应轴向力 N 和弯矩 M 之间的关系可以用裂纹处对应的无限长边裂纹板条的广义本构关系来模拟。而边裂纹板条的解已有解析式, 于是, 二维原问题就转化为一维问题了。

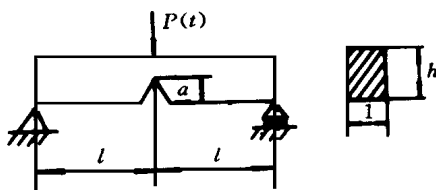


图 1

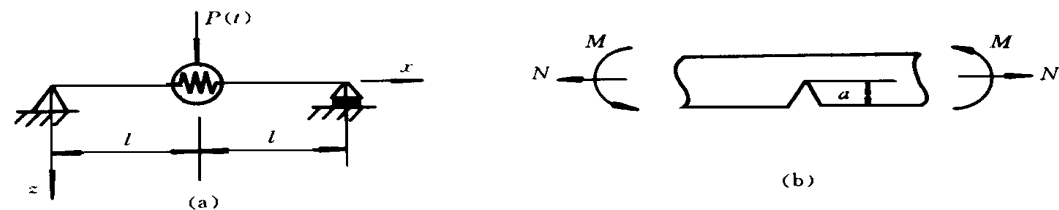


图 2

2 全局方程

2.1 一般分析

图 2(a) 示问题的控制方程为全局方程, 可以用梁的初等弯曲理论导出。不失一般性, 对高度为 h 、宽度为单位 1 的矩形截面梁, 梁的挠度 w 与 u 应满足

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(t) \delta(x - l) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

其中 EI 为抗弯刚度, ρ 为材料密度, A 为横截面积, $\delta(x)$ 为单位脉冲函数。

不妨设 $w = w_0 + w_c$ 和 $u = u_0 + u_c$, w_0 和 u_0 为相应的无裂纹梁的解, w_c 和 u_c 为裂纹引起的附加位移, 于是

$$EI \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = P(t) \delta(x - l) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

$$EI \frac{\partial^4 w_c}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

2.2 无裂纹梁的解

不难看出(1b)的满足无裂纹梁边界条件和初始条件的解为

$$u_0 = 0$$

所以

$$N_0(x, t) = 0 \quad (2)$$

用振型叠加法可求出(1a)满足无裂纹梁边界条件和初始条件的解为

$$w_0(x, t) = \frac{P_0}{t_0} \frac{1}{\rho A l} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi x}{2l} \frac{1}{\omega} \left[t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \quad (3)$$

其中 $\omega = \left(\frac{n\pi}{2l} \right)^2 \frac{EI}{\rho A}$, 从 $M_0(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$, 利用(3)可导出

$$M_0(l, t) = k\sigma_s h l \frac{t^*}{t_0} \left[\frac{1}{2} \bar{t} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \quad (4)$$

其中 $\bar{t} = \frac{t}{t^*}$, $t^* = \frac{h}{c_0}$, $c_0 = \frac{E}{\rho}$, $k = \frac{P_0}{\sigma_s h}$, $\bar{\omega}_h = \frac{n^2 \pi^2 h^2}{8 \cdot 3 l^2}$

σ_s 为材料的屈服限

2.3 裂纹引起的附加位移和附加内力

由裂纹引起的附加弯矩 $M_c(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}$, 并设 $w_c = \frac{\theta}{2} x$ (刚体转动), 则(1a) 成为

$$\frac{\partial^2 M_c}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \rho h x \ddot{\theta}$$

引入边界条件 $M_c|_{x=0} = \frac{\partial M_c}{\partial x}|_{x=l} = 0$, 解得

$$M_c(l, t) = -\frac{1}{6} \rho h l^3 \ddot{\theta} \quad (5)$$

由裂纹引起的附加轴力 $N_c(x, t) = EA \frac{\partial u_c}{\partial x}$, 并设 $u_c = -\frac{\Delta}{2}$ (刚体移动), 则(1b) 成为

$$\frac{\partial N_c}{\partial x} = -\frac{1}{2} \rho h \ddot{\Delta}$$

引入边界条件 $N_c|_{x=0} = 0$, 解得

$$N_c(l, t) = -\frac{1}{2} \rho h l \ddot{\Delta} \quad (6)$$

2.4 全局方程

引入无量纲位移 $q_1 = \Delta/h$ 和 $q_2 = \theta$, 无量纲内力 $Q_1 = \frac{N(l, t)}{\sigma_s h}$ 和 $Q_2 = \frac{M(l, t)}{\sigma_s h^2}$, 无量

纲时间 $\bar{t} = \frac{t}{t^*}$, 则从式(2)、式(6)、式(4)、式(5)可得梁的全局方程

$$Q_1 = - \frac{EL}{2\sigma_s h} \ddot{q}_1 \quad (7a)$$

$$Q_2 = - \frac{EL^3}{6\sigma_s h^3} \ddot{q}_2 + k \frac{L}{h} \frac{t^*}{t_0} f_0(\bar{t}) \quad (7b)$$

或

$$\ddot{q}_i = - D_{ij} Q_j + f_i(\bar{t}) \quad (i, j = 1, 2) \quad (7)$$

其中 $f_0(\bar{t}) = \frac{1}{2} \bar{t} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \frac{\sin(n\omega\bar{t})}{\omega}$,

$$\ddot{q}_i = d^2 q_i / d\bar{t}^2, D_{11} = 2\sigma_s h / (EL), D_{12} = D_{21} = 0$$

$$D_{22} = 6\sigma_s h^3 / (EL^3), f_1(\bar{t}) = 0, f_2(\bar{t}) = 6k \frac{t^*}{t_0} \frac{h^2}{l^2} \frac{\sigma_s}{E} f_0(\bar{t})$$

3 线弹簧本构关系

图 2(b) 所示边裂纹板条的应力强度因子 K_1 为

$$K_1 = \frac{1}{h} \left[\frac{N}{h} g_M(\zeta) + \frac{M}{h^2} g_B(\zeta) \right]$$

其中 $\zeta = a/h$, 引入无量纲应力强度因子 $\bar{K}_1 = \frac{K_1}{\sigma_s \frac{h}{h}}$, 则

$$\bar{K}_1 = Q_1 g_1(\zeta) + Q_2 g_2(\zeta) \quad (8)$$

本文取^[4] $g_1(\zeta) = g_M(\zeta) = [0.752 + 2.02\zeta + 0.37(1 - \sin \frac{n\zeta}{2})^3] \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi\zeta}{2}}{\cos \frac{\pi\zeta}{2}}$

$$g_2(\zeta) = g_B(\zeta) = 6[0.923 + 0.199(1 - \sin \frac{n\zeta}{2})^4] \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi\zeta}{2}}{\cos \frac{\pi\zeta}{2}}$$

由裂纹引起的应变能 $U = \frac{1-v^2}{E} \int_0^a K^2 da$, 并注意到 $\Delta = \frac{\partial U}{\partial N}$, $\theta = \frac{\partial U}{\partial M}$, 得

$$q_i = \alpha_{ij} Q_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (9)$$

或

$$Q_i = S_{ij} q_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (9)$$

其中 $\alpha_{ij} = \frac{2\alpha}{E} \bar{\alpha}_{ij}$, $\bar{\alpha}_{ij} = (1-v^2) \int_0^{a/h} g_i(\zeta) g_j(\zeta) d\zeta \quad (i, j = 1, 2)$

$$[S_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1} = \frac{E}{2\alpha} [\bar{\alpha}_{ij}]^{-1}$$

4 问题的控制方程

将(9) 代入(7) 得问题的控制方程

$$\ddot{q}_i + D_{ij} S_{jk} q_k = f_i(\bar{t}) \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (10)$$

初始条件: $\bar{t} = 0$ 时, $q_i = \dot{q}_i = 0$

用 R-K 方法解得 q_i 后, 代入(9) 可得 Q_i , 再代入(8) 可得

$$\bar{K}_1 = \frac{P_0}{\alpha h} [Q_1 g_1(\zeta) + Q_2 g_2(\zeta)] \quad (11)$$

其中 Q_1, Q_2 为取 $k = 1$ 时, 求得的无量纲广义力。

5 数值结果

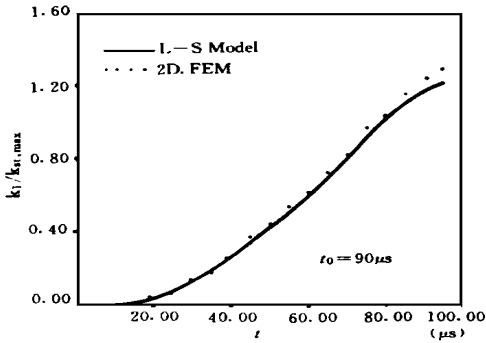


图 3

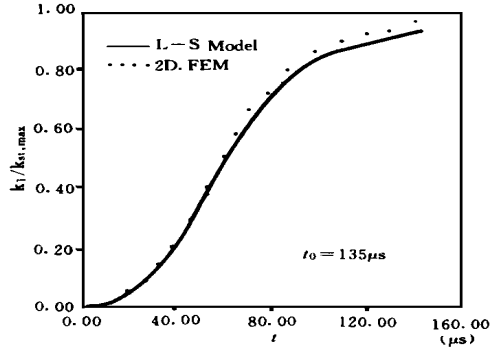


图 4

取 $E = 204\text{GPa}$, $\nu = 0.286$, $\rho = 7.84 \times 10^3\text{kg/m}^3$, $h = 0.010\text{m}$, $l = 0.020\text{m}$, $\sigma_s = 400\text{MPa}$, $P_0 = \frac{1}{3}\sigma_s h$, $a/h = 0.5$, 计算出 \bar{K}_1 。并用与 P_0 对应的静态应力强度因子 $\bar{K}_{st, max}$ 归一化, 将数值结果与二维有限元结果比较于图 3 ~ 图 5 中。 $\bar{K}_{st, max}$ 的表达式为^[4]

$$\bar{K}_{st, max} = \frac{P_0}{\sigma_s h} 2 \frac{1}{h} F_1(\zeta) \quad (12)$$

其中 $F_1(\zeta) = 2.9\zeta^2 - 4.6\zeta^3 + 21.8\zeta^5 - 37.6\zeta^7 + 38.7\zeta^9$, 图 3、图 4 和图 5 分别给出了

$t_0 = 90\mu\text{s}$ 、 $t_0 = 135\mu\text{s}$ 和 $t_0 = 180\mu\text{s}$ 的计算结果, 从中可以看出本文模型结果与二维有限元结果基本上一致。

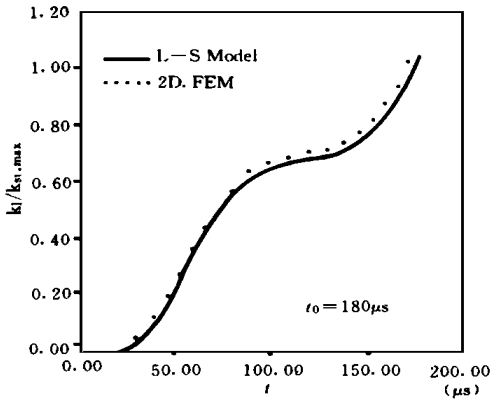


图 5

6 结论

本文以三点弯曲梁为对象, 用线弹簧模型和梁的初等弯曲理论建立了一种有效的动态断裂分析方法。该方法既可方便地用于其它边界条件下梁的线弹性动态断裂分析, 也可推广于梁的弹塑性动态断裂分析和裂纹的扩展分析中。

参考文献

- 1 Freund L B, Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending. J. Appl. Mech., 1976, 43: 112
- 2 Adeli H, Herrmann G and Freund L B. Effect of axial force on dynamic fracture of a beam or plate in pure bending. J. Appl. Mech. 1977, 44: 647
- 3 Miyazaki N. Application of line-spring model to dynamic stress intensity factor analysis of pre-cracked bending specimen. Eng. Frac. Mech., 1991, 38: 321
- 4 Rooke D P, Cartwright D J. Compendium of stress intensity factors. London, 1976

(责任编辑 石少平)