国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第2期　1997年4月　Vol.19 No.2

CAD中的保形曲线拟合*

唐　渝　　黄国立　　王兴波
(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　本文描述了构造保形插值曲线的一个新方法,在相邻型值点之间构造三次参数曲线,所构造的曲线是局部的,保形的和 G^2 连续的。

关键词　CAGD,保形插值,参数曲线
分类号　O241.3

Shape- Preserving Curve Fitting in CAD

Tang Yu　Huang guoli　Wang Xingbao
(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　This paper presents shape- preserving algorithm, the cubic parametrical curve is constructed between two cosecute data points, the resulted interpolating spline curve is local, shape- preserving and G^2- continuous.

Key words　CAGD, shape- preserving interpolation, parametrical curve

曲线的保形插值在计算机辅助几何设计中有着非常重要的作用,已越来越引起人们的关注和重视。已有许多作者作了深入的研究,取得了丰富的研究成果[1,2]。分段参数曲线的插值方法已有不少,但这些方法或是不能局部修改[3],或是高次的[4],或是段数很多[5],而对分段参数曲线的保形插值,人们研究得还很少。目前比较典型的有T.N.T.Goodman等提出的以曲率为自由参数的分段三次保形插值法[6]。这些方法要么在型值点处取曲率为零,要么通过解二次非线性方程组近似求解B zier点,因此曲线的构造较复杂,且曲率参数很难调节曲线的形状。本文提出的方法是:在每相邻两型值点之间构造两段三次B zier曲线,所有B zier点由 G^2 连续性条件直接计算得到。所构造的插值曲线是局部的、保形的和 G^2 连续的,曲线的自由参数还能很好地调节曲线的形状。

* 1996年3月10日收稿

1　保形分段插值的构造

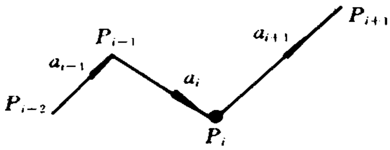
给定平面上的有序点列 $P_i = (x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 依次用直线段连接相邻两点, 构成一个多边形, 记为$(P_0P_1\cdots P_n)$, 称该多边形为型值多边形, 记它们的边向量分别为:

$$\boldsymbol{a}_i = P_{i-1} - P_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

并且记

$$\boldsymbol{a}_0 = -\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_{n+1} = -\boldsymbol{a}_{n-1}$$

定义　已知多边形$(P_0P_1\cdots P_n)$, 如果 $\boldsymbol{a}_{i-1}\times\boldsymbol{a}_i$ 与 $\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{a}_{i+1}$平行且有相反的方向, 则我们称 P_i 是多边形$(P_0P_1\cdots P_n)$的拐点(如图 1 所示)。



圆点 · 表示拐点

图 1

本文目的是构造分段三次的 B zier 曲线, 使曲线具有如下性质:

(1) 插值型值多边形项点;

(2) 曲线具有二阶几何连续, 且可局部修改;

(3) 曲线的拐点个数等于型值多边形的拐点个数。

下面假设过 P_i, P_{i+1} 两点的三次B zier 曲线偶为$R_i(t) = (r_{2i+1}(t), r_{2i+2}(t))$ $(0 < t < 1)$, 这里 $r_{2i+1}(t)$ 和 r_{2i+2} 都是三次 B zier 曲线; $R_i(t)$ 在两段 B zier 曲线的连接处是 G^3 连续的, 且在两个端点分别插值 $P_i(t = 0)$, $P_{i+1}(t = 1)$.

下面分步描述插值曲线的构造过程:

1.1　插值曲线在型值点处的切矢

由型值多边形的边矢定义插值曲线在 P_i 处的切矢 $\boldsymbol{T}_i$ 如下:

如果P_i 是多边形$(P_0P_1\cdots P_n)$的拐点, 则令

$$\boldsymbol{T}_i = t_i\boldsymbol{a}_i + (1 - t_i)(-\boldsymbol{a}_{i+1}), \tag{1}$$

否则令

$$\boldsymbol{T}_i = t_i\boldsymbol{a}_i + (1 - t_i)(\boldsymbol{a}_{i+1}), \tag{2}$$

其中 $0 < t_i < 1$, 是确定切矢 $\boldsymbol{T}_i$ 方向的调节参数。

特别, 如果 P_{i-1}, P_i, P_{i+1}三点共线, 则定义

$$\boldsymbol{T}_{i-1} = \boldsymbol{T}_i = \boldsymbol{T}_{i+1} = \boldsymbol{a}_i,$$

即选取 $t_{i-1} = 0, t_{i+1} = 1$.

现在我们考虑两点 P_i, P_{i+1}, 通过切矢的定义我们知道 $\boldsymbol{T}_i\times\boldsymbol{T}_{i+1}$总是平行 $\boldsymbol{a}_{i+1}\times\boldsymbol{T}_i$ 且有相同的方向, 所以容易求得分别过 P_i 和 P_{i+1}且平行于 $\boldsymbol{T}_i$ 和 $\boldsymbol{T}_{i+1}$的直线 l_i 和 l_{i+1}的交点 V_i;

$$V_i = P_i + \frac{\boldsymbol{a}_{i+1}\times\boldsymbol{T}_{i+1}}{\boldsymbol{T}_i\times\boldsymbol{T}_{i+1}}\boldsymbol{T}_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1), \tag{3}$$

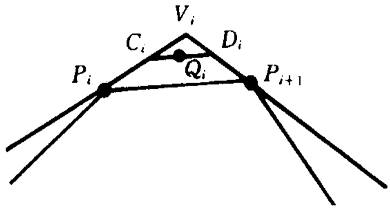
1.2　B zier 点的定义

如图 2 所示, 令

$$C_i = V_i + \lambda_i(P_i - V_i),$$

$$D_i = V_i + \mu_i(P_{i+1} - V_i),$$

$$Q_i = D_i + \rho_i(C_i - D_i)$$
$$(i = 0, 1, \cdots, n), \qquad (4)$$



圆点 · 表示 B zier 点

图 2

其中 $0 < \lambda_i, \mu_i, \rho_i < 1$ 是用户选取的自由参数。

下面分两种情况定义B zier 曲线段 $r_{2i}(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $r_{2i+1}(t)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 的 B zier 点 $b_{j,2i}(j = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, \cdots, n)$, $b_{j,2i+1}(j = 0, 1, 2, 3; i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

(1) 初定义 B zier 点

$$\begin{aligned} b_{1,2i} &= D_{i-1} + l_{2i}(Q_{i-1} - D_{i-1}), \\ b_{2,2i} &= D_{i-1} + l_{2i}(P_i - D_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ b_{3,2i} &= P_i, \end{aligned} \qquad (5)$$

和

$$\begin{aligned} b_{0,2i+1} &= P_i, \\ b_{1,2i+1} &= C_i + l_{2i+1}(P_i - C_i), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, \\ b_{2,2i+1} &= C_i + l_{2i+1}(Q_i - C_i), \end{aligned} \qquad (6)$$

并且

$$b_{3,2i+1} = b_{0,2i+2} = x_i b_{2,2i+1} + (1 - x_i) b_{1,2i+2}; \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad (7)$$

式中 $0 < l_{2i}, l_{2i+1}; x_i < 1$ 都是待定系数。

(2) 重新定义部分 B zier 点

对于 $i = 2, 3, \cdots, n-1$, 如果 P_i 是多边形 $(P_0 P_1 \cdots P_n)$ 的拐点, 则重新定义

$$b_{1,2i} = D_{i-1}, \; b_{2,2i+1} = C_i, \qquad (8)$$

由上面的B zier 点可以得到整条分段三次曲线 $r(t)$

$$\begin{cases} r_{2i+1}(t) = \sum B_{j,3}(t) b_{j,2i+1} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \\ r_{2i}(t) = \sum B_{j,3}(t) b_{j,2i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \qquad (9)$$

式中 $B_{j,3}(t) = C_3^j t^j (1-t)^{3-j}$, $0 < t < 1$.

1.3 确定待定系数

由前面 B zier 点的选取知, 分段三次曲线 $R(t)$ 插值多边形 $(P_0 P_1 \cdots P_n)$ 的所有顶点 P_i, 且 $R(t)$ 是 G^1 连续的, 再由图 2 知, 分段三次曲线 $r(t)$ 仅仅在型值多边形的拐点处生成一个拐点, 即 $r(t)$ 的拐点个数等于多边形 $(P_0 P_1 \cdots P_n)$ 的拐点个数, 下面根据 $R(t)$ 的 G^2 连续充要条件求解未知数 l_{2i}, l_{2i+1}, x_i, 从而确定所有的B zier 点。

如果 P_i 是多边形 $(P_0 P_1 \cdots P_n)$ 的拐点, 则 $r(t)$ 在 P_i 处也是拐点, 因此 $0 < l_{2i}, l_{2i+1} < 1$ 可以任意选取,

如果 P_i 不是多边形 $(P_0 P_1 \cdots P_n)$ 的拐点 , 则由 B zier 曲线的性质, 我们有:

$$\begin{aligned} r'_{2i}(1) &= 3b_{2,2i}b_{3,2i} = 3(1 - l_{2i}) D_{i-1}P_i, \\ r''_{2i}(1) &= 6(r'_{2i}(1)/3 - l_{2i}D_{i-1}P_{i-1} + l_{2i}D_{i-1}Q_{i-1}), \\ r'_{2i+1}(0) &= 3b_{0,2i+1}b_{1,2i+1} = 3(1 - l_{2i+1}) P_iC_i, \\ r''_{2i+1}(0) &= 6(l_{2i+1}C_iQ_i - l_{2i+1}P_iC_i - r'_{2i+1}(0)/(3) \end{aligned}$$

因为 $r_{2i}(t)$ 和 $r_{2i+1}(t)$ 在连接点 P_i 处 G^2 连续的充要条件是:

$$\frac{r_{2i}'(1) \times r_{2i}''(1)}{r_{2i}'(1)^3} = \frac{r_{2i+1}'(0) \times r_{2i+1}''(0)}{r_{2i+1}'(0)^3} \tag{10}$$

将 $r_{2i}'(1)$, $r_{2i}''(1)$, $r_{2i+1}'(0)$, $r_{2i+1}''(0)$ 代入(10),并从图 2 注意到 $D_{i-1}P_i \times D_{i-1}Q_{i-1}$ 和 $P_iC_i \times C_iQ_i$ 平行且方向相同,因此(10)等价于

$$\frac{l_{2i}\ D_{i-1}P_i \times D_{i-1}Q_{i-1}}{(1-l_{2i})^2\ D_{i-1}P_i^{\ 3}} = \frac{l_{2i+1}\ P_iC_i \times C_iQ_i}{(1-l_{2i+1})^2\ P_iC_i^{\ 3}}$$

记

$$w_{2i} = \frac{D_{i-1}P_i \times D_{i-1}Q_{i-1}}{D_{i-1}P_i^{\ 3}}, \quad w_{2i+1} = \frac{P_iC_i \times C_iQ_i}{P_iC_i^{\ 3}}$$

如果选取 $l_{2i} \in (0,1)$,则求解方程(10)得到:

$$l_{2i+1} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{1+4l_{2i}w_{2i}/(1-l_{2i})^2 w_{2i+1}}}$$

很明显有: $0 < l_{2i+1} < 1$,剩下的 l_1 和 l_{2n} 可在区间(0, 1)上任意选取。

类似地,如果选取 $l_{2i+1} \in (0,1)$,则有

$$l_{2i} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{1+4l_{2i+1}w_{2i+1}/(1-l_{2i+1})^2 w_{2i}}}$$

同样有 $0 < l_{2i} < 1$,剩下的 l_1 和 l_{2n} 可在区间(0, 1)上任意选取。

到此,我们已经证明分段三次曲线在每一个型值点 P_i 都是 G^2 连续的,且确定了由式(5)和(6)定义的所有 B zier 点,剩下来就是证明每个三次曲线偶段 $R(t) = (r_{2i+1}(t), r_{2i+2}(t))$ 在连接点处是 G^2 连续的,并且确定由(7)式定义的所有 B zier 点。

在 $t = 0, t = 1$ 处,我们有

$$\begin{aligned}
r_{2i+1}'(1) &= 3(1-x_i)b_{2,2i+1}b_{1,2i+2} \\
r_{2i+1}''(1) &= 6(r_{2i+1}'(1)/3 - b_{1,2i+1}b_{2,2i+1}) \\
r_{2i+2}'(0) &= 3x_i b_{2,2i+1}b_{1,2i+2} \\
r_{2i+2}''(0) &= 6(b_{1,2i+2}b_{2,2i+2} - r_{2i+2}'(0)/3
\end{aligned}$$

$r_i(t)$ 在连接点 G^2 连续的充要条件是

$$\frac{r_{2i+1}'(1) \times r_{2i+1}''(1)}{r_{2i+1}'(1)^3} = \frac{r_{2i+2}'(0) \times r_{2i+2}''(0)}{r_{2i+2}'(0)^3}$$

将 $r_{2i+1}'(1)$, $r_{2i+1}''(1)$, $r_{2i+2}'(0)$, $r_{2i+2}''(0)$ 代入上式化简可求得

$$x_i = \frac{1}{1+\sqrt{y_1/y_2}}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{14}$$

其中:

$$\begin{aligned}
y_1 &= b_{1,2i+1}b_{2,2i+1} \times b_{2,2i+1}b_{1,2i+2}, \\
y_2 &= b_{2,2i+1}b_{1,2i+2} \times b_{1,2i+2}b_{2,2i+2},
\end{aligned}$$

显然有 $0 < x_i < 1$

至此,我们已经证明了分段三次插值曲线 $r(t)$ 是 G^2 连续的和保形的,它的所有

B zier 点也被确定。下面我们简单地归纳一下构造曲线的步骤

(1) 确定型值多边形的拐点;

(2) 由(1)和(2)确定插值曲线的切矢;

(3) 由(3)计算曲线在相邻两型值点处切线的交点 $V_i(i = 1, 2, \cdots, n - 1)$;

(4) 由(4) 确定 $C_i, D_i, Q_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n - 1)$;

(5) 在区间(0, 1) 上任意选取初值 $l_1, l_{2i}(i = 1, 2, \cdots, n)$;

(6) 对于 $i = 1, 2, \cdots, n - 1$, 如果是多边形 $(P_0P_1\cdots P_n)$ 的拐点, 任意选取 $l_{2i+1} \in (0, 1)$, 否则由(11) 计算 l_{2i+1};

(7) 由(14) 计算 $x_i(i = 0, 1, \cdots, n - 1)$;

(8) 由(5) – (8) 计算所有 B zier 点, 代入分段三次 B zier 曲线表示, 则可计算曲线上的任意点;

(9) 转(1)修改曲线在型值点处的切矢方向, 转(4), (5) 调节曲线段的形状。

2 数值例子

图 3 是用本文方法绘制的一条保形插值曲线, 该曲线通过 10 个型值点

图 3 保形插值曲线

参 考 文 献

1 Brodlie, K W Butt. S. Preserving Convexity using piecewise cubic interpolation & Graphics, 1991, 15(1), 15～23

2 Fang K. (G^2– Continuous) Shape Preserving Cubic Interpolation Spline Curve. J. National University of Defense Technology, 1995 17(3). 65～69

3 Adams. J. Cubic Spline fitting with Controcled end condition, CAD, 1974, 6(1). 0～9

4 Hagan. H. Geometric Spline Curres, CAGD, 1985, 2(3), 223～227

5 Shirman. L A. Procedural Interpolation with Curvature continuous cubic spline, CAD, 1992, 24(5), 278～286

6 Goodman T. N. T. Shape preserving Interpolation by parametrically definde, CAGD, 1989, 6(2): 115～121

(责任编辑　张静)