国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 19 卷第 2 期 1997 年 4 月 Vol. 19 No. 2

试验函数空间的非标准包*

刘普寅

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文研究了试验函数空间 D(Ω) 的非标准包(D)^ 及其性质,并给出了(D)^中元素的构造。最后,证明了(D)^与 D(Ω) 有着类似的结构,而且(D)^也可作为一类局部凸空间的严格归纳极限。

关键词 非标准包, ∂_i 有限点, ∂_i 单子

分类号 0177.4

The Nonstandard Hulls of Test Function Spaces

Liu Puyin

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, We study the nonstandard hull $(D)^{\wedge}$ of the test function space $D(\Omega)$ and its properties, and give the structure of the elements in $(D)^{\wedge}$. Finally, We prove that $(D)^{\wedge}$ and $D(\Omega)$ are similar in their structures, and $(D)^{\wedge}$ is the strict inductive limit of a class of local convex spaces.

Key Word Nonstandard hulls, ∂_i- finite points, ∂_iMonads

对于广义函数的非标准研究, 自从 A. Robinson 在文献[1] 提出以来, 国内外学者较圆满地解决了经典广义函数理论中许多棘手的问题。例如文献[4][5]通过对非标准 δ 函数的研究, 把广义函数同一个普通的函数对应起来; 文献[11][12] 用非标准方法研究了广义函数的乘法, 大大推广了经典的乘法运算。如何对广义函数定义域的试验函数空间非标准特征进行刻划, 对它的非标准包的结构及性质作出全面的描述, 对于更进一步用非标准分析方法来研究广义函数是非常重要的。

1 预备知识

在本文, 记 Ω 为几维欧氏空间 R^n 中的一个固定的开集, 而$\{K_i \; i\in N\}$ 为 Ω 的一个紧

* 国家自然科学基金和国防科技大学青年基金资助项目。
1996 年 8 月 20 日修订

集列, 且满足: $K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_i\subset\cdots$; $\bigcup_{i\in N}K_i=\Omega$。$N$ 为自然数集, $N_0=N\cup\{0\}$。$R_+=\{x\in R\mid x>0\}$ $C^m(\Omega)$ 为定义在 Ω 上具有直到 m 阶连续偏导数的实值函数全体, 而记

$$E(\Omega)=\bigcap_{m\in N_0}C^m(\Omega)\mid C^\infty(\Omega)$$

$D(\Omega)$ 为 $E(\Omega)$ 中具有紧支集的全体函数之集, 对 $i\in N$, $D(\Omega,K_i)$ 为支集含于 K_i 的 $E(\Omega)$ 中函数全体。对于 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in N_0^n$, 记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, 设 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in R^n$, $\varphi\in E(\Omega)$, $\partial^\alpha\varphi(p)=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial p_1^{\alpha_1}\cdots\partial p_n^{\alpha_n}}\varphi(p)$。在 $E(\Omega)$ 定义半范数

$$p_{m,i}=\sup_{p\in K_i,\ |\alpha|\le m}|\partial^\alpha\varphi(p)|\qquad(\varphi\in E(\Omega))\tag{1}$$

则半范数族 $\{p_{m,i}\mid m\in N_0,i\in N\}$ 定义了 $E(\Omega)$ 上的局部凸拓扑, 记之为 e。对每个 $i\in N$, $\{p_{m,i}\mid m\in N_0\}$ 定义了 $D(\Omega,K_i)$ 上的局部凸拓扑, 记之为 d_i。$D(\Omega)=\bigcup_{i\in N}D(\Omega,K_i)$, 在 $D(\Omega)$ 上定义严格归纳拓扑, 记为 d, 即 d 是使每个嵌入映射 $J_i^{⑦}: D(\Omega,K_i)\to D(\Omega)$ $(i\in N)$ 为连续的最强的局部凸拓扑。对于一个拓扑向量空间 (E,θ), 记 $\mathscr{F}_\theta(0)$ 为 E 中 0 的均衡邻域组成的邻域基, $\mu_\theta(0)$ 表示 0 的单子。若 E 为局部凸空间, 则 $\mathscr{F}_\theta(0)$ 表示 E 中 0 的全体均衡凸领域所成之集。且假定我们的讨论在一个足够大的多饱和模型中进行。文中其余没有说明的概念与记号可见文献[2][8]。

我们已经证明下面的命题:

命题 1.1　设 $i\in N$, 则下述断言成立:

(i) $\mu_{d_i}(0)\subset\mu_{d_{i+1}}(0)$;

(ii) 对任何 $k\in N$, $\mu_{d_{i+k}}(0)\cap{}^*D(\Omega,K_i)=\mu_{d_i}(0)$;

(iii) $\mu_d(0)\cap{}^*D(\Omega,K_i)=\mu_{d_i}(0)$;

(iv) $\mathrm{fin}_e({}^*E(\Omega))=ns_e({}^*E(\Omega))$。

设 (E,θ) 为拓扑向量空间, 称商空间 $\mathrm{fin}_\theta({}^*E)/\mu_\theta(0)$ 为 E 的非标准包, 记之为 $(E)^\wedge$, 而设 $\tilde\theta$ 为 ${}^*E$ 中由 0 的邻域基 $\{{}^*V\mid V\in\mathscr{F}(0)\}$ 所决定的拓扑。由命题 1.1, 试验函数空间 $E(\Omega)$ 的非标准包 $(E(\Omega))^\wedge$ 和自身是代数同构的, 所以本文主要讨论 $D(\Omega)$ 的非标准包 $(D(\Omega))^\wedge$, 且今后简记为 $(D)^\wedge$。

命题 1.2　设 (E,θ) 为实数集 R 上的拓扑向量空间, 则有

(i) $(E)^\wedge$ 是实数集 R 上的一个线性空间;

(ii) 拓扑 $\tilde\theta$ 限制在 $\mathrm{fin}_\theta({}^*E)$ 上是一个向量拓扑, 且 $\mathrm{fin}_\theta({}^*E)$ 是 ${}^*E$ 中的 $\tilde\theta$– 闭子集;

(iii) $\tilde\theta$ 限制在 E 中即为 θ, 即 $\tilde\theta\cap E\equiv\{\tilde V\cap E\mid\tilde V\in\tilde\theta\}=\theta$。

证明　(i)、(ii) 由文献 [2] 即得。至于 (iii), 任取集合 $V\in\mathscr{F}(0)$, 有 ${}^*V\cap E=V$, 故 $\tilde\theta\cap E\supset\theta$。另一方面, 设 $\tilde V$ 是 E 中 0 的邻域, 则有 $V\in\mathscr{F}(0)$, ${}^*V\subset\tilde V$, $V={}^*V\cap E\subset\tilde V\cap E$, 故 $\tilde V\cap E$ 是 E 中 0 的邻域, 这样 $\tilde\theta\cap E\subset\theta$。故 (iii) 成立。

由于 $\mu_\theta(0)$ 也是 R 上的线性空间, 取 $(E)^\wedge$ 上的拓扑为商拓扑, 则 $(E)^\wedge$ 即为一个拓扑向量空间。

2　$(D)^\wedge$ 的结构

对于 $i\in N$, 记 $\tilde D_i={}^*D(\Omega,K_i)$, 设序列 $\{D(\Omega,K_i)\mid i\in N\}$ 的非标准扩张为 $\{\tilde D_i\mid i\in$

${}^*N\}$，则 $\tilde{D}_i\subset\tilde{D}_{i+1}(i\in{}^*N)$，$\bigcup\limits_{i\in{}^*N}\tilde{D}_i={}^*D(\Omega)$。若 $i\in{}^*N$，设 $I_i:\tilde{D}_i\to{}^*D(\Omega)$ 为嵌入映射，当 $i\in N$ 时，有 $I_i={}^*J_i^{⑦}$。记

$$\mathscr{C}_i=\{I_i^{-1}({}^*V)\quad V\in\mathscr{F}_d(0)\}\qquad(i\in{}^*N)\tag{2}$$

若 $i\in{}^*N\setminus N$，则记 $\tilde{D}_i$ 以 $\mathscr{C}_i$ 为 0 的邻域基所决定的拓扑为 $\tilde{d}_i$。若 $i\in N$，则在 $\tilde{D}_i$ 中，$\mathscr{C}_i$ 是关于拓扑 $\tilde{d}_i$ 的 0 的邻域基。又记

$$\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)=I_i^{-1}(\mathrm{fin}_{\tilde{d}}({}^*D(\Omega)))\qquad(i\in{}^*N)\tag{3}$$

命题 2.1　设 $i\in N$，则 $\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)=\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$。

证明　设 $F\in\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)$，则 $F\in{}^*D(\Omega)$，$I_i^{-1}(F)=F$。任取 $V\in\mathscr{F}d(0)$，设 $V=\bigcup\limits_{j\in N}V_j$，而 $V_j\in\mathscr{F}_{d_j}(0)$，$V_j\subset V_{j+1}(j\in N)$，则有 $k\in N$，$F\in k\cdot{}^*V_i\subset k\cdot{}^*V$，即 $F\in\mathrm{fin}_d({}^*D(\Omega))$，这样 $F\in\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$，$\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)\subset\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$。反之，设 $F\in\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$，则必有 $F\in\tilde{D}_i$，$I_i^{-1}(F)=F$，$F\in\mathrm{fin}_d({}^*D(\Omega))$，故任取 $\nu\in{}^*N\setminus N$，$\dfrac{1}{\nu}\cdot F\in\mu_d(0)\cap\tilde{D}_i$，由命题 1.1，$\dfrac{1}{\nu}\cdot F\in\mu_{d_i}(0)$，故 $F\in\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)$，$\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)\subset\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)$，命题得证。

定理 2.1　设 $i\in{}^*N$，拓扑 $\tilde{d}_i$ 限制在 $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$ 上是一个局部凸的向量拓扑。

证明　若 $i\in N$，则由命题 1.2 与命题 2.1，$\tilde{d}_i$ 限制在 $\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i)$ 上是一个向量拓扑。下设 $i\in{}^*N\setminus N$。

¹　任取 $\tilde{V}_1,\tilde{V}_2\in\mathscr{C}_i$，则有 $V_1,V_2\in\mathscr{F}d(0)$，使 $\tilde{V}_j=I_i^{-1}({}^*V_j)(j=1,2)$，$\tilde{V}_1\cap\tilde{V}_2=I_i^{-1}({}^*V_1\cap{}^*V_2)=I_i^{-1}({}^*V_1\cap V_2))$，从而 $\tilde{V}_1\cap\tilde{V}_2\in\mathscr{C}_i$。

④设 $\tilde{V}\in\mathscr{C}_i$，则有 $V\in\mathscr{F}_d(0)$，$\tilde{V}=I_i^{-1}({}^*V)$。而有 $V_1,V_2\in\mathscr{F}_d(0)$，使 $V_1+V_2\subset V$，故 ${}^*V_1+{}^*V_2\subset{}^*V$，且易验证

$$I_i^{-1}({}^*V_1)+I_i^{-1}({}^*V_2)\subset I_i^{-1}({}^*V_1+{}^*V_2)\subset I_i^{-1}({}^*V)\tag{4}$$

令 $\tilde{V}_j=I_i^{-1}({}^*V_j)(j=1,2)$，则 $\tilde{V}_1,\tilde{V}\in\mathscr{C}_i$，$\tilde{V}_1+\tilde{V}_2\subset\tilde{V}$。

㈣任取 $\tilde{V}\in\mathscr{C}_i$，设 $V\in\mathscr{F}_d(0)$，$\tilde{V}=I_i^{-1}({}^*V)$。$V$ 为均衡集，则任取 $\alpha\in R$，$|\alpha|\le1$ 时，$\alpha V\subset V$，$I_i^{-1}(\alpha{}^*V)\subset I_i^{-1}({}^*V)$，$\alpha\tilde{V}\subset\tilde{V}$。

¼　若 $\tilde{V}\in\mathscr{C}_i$，$V\in\mathscr{F}_d(0)$，$\tilde{V}=I_i^{-1}({}^*V)$。任取 $F\in\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$，则 $F\in\mathrm{fin}_d({}^*D(\Omega))$，$I_i^{-1}(F)=F$。有 $\lambda_0\in R_+$，使 $\lambda_0\cdot F\in{}^*V$，从而任取 $\lambda\in R$，$|\lambda|\le\lambda_0$ 时，$\lambda F=\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\lambda_0F\in{}^*V$，$\lambda F\in\tilde{V}$，即 $\tilde{V}$ 限制在 $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$ 是吸收的。综合上述¹ ～¼，在 $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$ 上有唯一的向量拓扑 $d^{⑦}$，使 $d^{⑦}$ 以 $\mathscr{C}_i\cap\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde{D}_i\equiv\{\tilde{V}\cap\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)\quad\tilde{V}\in\mathscr{C}_i\}$ 为 0 的邻域基。显见 $d^{⑦}=\tilde{d}_i\ \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$，即 $\tilde{d}_i$ 限制在 $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$ 上为一个向量拓扑。

总之，对 $i\in{}^*N$，$\tilde{d}_i$ 限制在 $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$ 上为向量拓扑。且易验证，$\mathscr{C}_i$ 中每个集为凸集，故此拓扑局部凸。

设 $i\in{}^*N$，称 $F\in\tilde{D}_i$ 为 $\tilde{d}_i$-有限点，若任取 $\tilde{V}\in\mathscr{C}_i$，存在 $k\in N$，使 $F\in k\cdot\tilde{V}$，而记 $\mu_{\tilde{d}_i}(0)=\bigcap\limits_{\tilde{V}\in\mathscr{C}_i}\tilde{V}$，称 $\mu_{\tilde{d}_i}(0)$ 为 0 的 $\tilde{d}_i$ 单子。

命题 2.2　设 $i\in{}^*N$，则有

(i) $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)=\{F\in\tilde{D}_i\quad F$ 为 $\tilde{d}_i$-有限点$\}$；

(ii) 若 $i\in N$，$\mu_{\tilde{d}_i}(0)=\mu_{d_i}(0)$；

(iii) $F\in\mathrm{fin}_{\tilde d_i}(\tilde D_i)$ 当且仅当任取 $\nu\in{}^*N\setminus N$, $\frac{1}{\nu}\cdot F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$。

证明　(i): 设 $F\in\mathrm{fin}_{\tilde d_i}(\tilde D_i)$, 则 $F=I_i^{-1}(F)$, $F\in\mathrm{fin}_d({}^*D(\Omega))$, $F\in\tilde D_i$。任取 $\tilde V\in\mathscr{C}_i$, 设 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, $\tilde V=I_i^{-1}({}^*V)$。存在 $k\in N$, $F\in k\cdot{}^*V$, 故 $F\in k\cdot I_i^{-1}({}^*V)=k\cdot\tilde V$, 即 F 为 $\tilde d_i$-有限点。反之, 设 F 为 $\tilde d_i$-有限点, 则 $F\in\tilde D_i$, $I_i(F)=F\in{}^*D(\Omega)$。任取 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, 则 $\tilde V\equiv I_i^{-1}({}^*V)\in\mathscr{C}_i$, 从而有 $k\in N$, $F\in k\cdot\tilde V=I_i^{-1}(k\cdot{}^*V)$, $F\in k\cdot{}^*V$, 故 $F\in\mathrm{fin}_d({}^*D(\Omega))$, $F\in\mathrm{fin}_{d_i}(\tilde D_i)$。($i$) 得证。

(ii): 设 $F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$, 则 $F\in\tilde D_i={}^*D(\Omega,K_i)$, $I_i^{-1}(F)=F$。任取 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, 则由于 $I_i^{-1}({}^*V)\in\mathscr{C}_i$, 有 $F\in I_i^{-1}({}^*V)$, $F\in{}^*V$, 故 $F\in\mu_d(0)$, $F\in\mu_d(0)\cap\tilde D_i=\mu_{d_i}(0)$。这样 $\mu_{\tilde d_i}(0)\subset\mu_{d_i}(0)$。反之, 设 $F\in\mu_{d_i}(0)$, 有 $F\in\tilde D_i$, $I_i^{-1}(F)=F$。而 $F\in\mu_d(0)$, 故任取 $\tilde V\in\mathscr{C}_i$, 有 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, $\tilde V=I_i^{-1}({}^*V)$, $F\in{}^*V$, 这样 $F=I_i^{-1}(F)\in I_i^{-1}({}^*V)=\tilde V$, 则 $F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$, $\mu_{\tilde d_i}(0)\supset\mu_{d_i}(0)$. ($ii$) 得证。

(iii): 若 $i\in N$, 则由命题2.1与上述(ii)显见。设 $i\in{}^*N\setminus N$, 若 $F\in\mathrm{fin}_{\tilde d_i}(\tilde D_i)$, 由($i$), F 为 $\tilde d_i$-有限点。任取 $\tilde V\in\mathscr{C}_i$, 存在 $\lambda_0\in R_+$, $\lambda_0F\in\tilde V$, 且由定理2.1证明中的㈣, $\tilde V$ 为均衡集, 故任取 $\nu\in{}^*N\setminus N$, $\lambda_0\cdot\nu>1$, $\frac{1}{\nu}F=\frac{1}{\lambda_0\nu}\lambda_0F\in\tilde V$, 从而 $\frac{1}{\nu}F\in\bigcap_{\tilde V\in\mathscr{C}_i}\tilde V=\mu_{\tilde d_i}(0)$。反之, 若对任意 $\nu\in{}^*N\setminus N$, $\frac{1}{\nu}F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$, 任取 $\tilde V\in\mathscr{C}_i$, 则由饱和性知, 存在 $k\in N$, $\frac{1}{k}F\in\tilde V$, 即 $F\in k\cdot\tilde V$, F 为 d_i-有限点, $F\in\mathrm{fin}_{\tilde d_i}(\tilde D_i)$。($iii$) 得证。

定理2.2　设 $i\in{}^*N$, 则有下述命题成立:

(i) $\mu_{d_i}(0)\subset\mu_{d_{i+1}}(0)$;

(ii) 对任何 $k\in{}^*N$, $V\in\mathscr{F}_d(0)$, 有 $I_{i+k}^{-1}({}^*V)\cap\tilde D_i=I_i^{-1}({}^*V)$;

(iii) 对任何 $k\in{}^*N$, $\mu_{d_{i+k}}(0)\cap\tilde D_i=\mu_{\tilde d_i}(0)$;

(iv) $\mu_d(0)\cap\tilde D_i=\mu_{\tilde d_i}(0)$;

(v) $\mathrm{fin}_d({}^*D)\cap\tilde D_i=\mathrm{fin}_{\tilde d_i}(\tilde D_i)$, 且对任何 $k\in{}^*N$, $\mathrm{fin}_{\tilde d_{i+k}}(D_{i+k}\cap\tilde D_i=\mathrm{fin}_{\tilde d_i}(\tilde D_i)$。

证明　(i): 由 $\mu_{\tilde d_i}(0)$ 定义, 并考虑到对任何 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, 有 $I_i^{-1}({}^*V)\subset I_{i+k}^{-1}({}^*V)$, 即可得证。

(ii): 由 I_i 为嵌入映射, 直接验证即得。

(iii): 由(i)并考虑到 $\tilde D_i\supset\mu_{\tilde d_i}(0)$, $\mu_{\tilde d_{i+k}}(0)\cap\tilde D_i\supset\mu_{\tilde d_i}(0)$。反之, 设 $F\in\mu_{d_{i+k}}(0)\cap\tilde D_i$, 则 $I_i^{-1}(F)=F$, 且任取 $\tilde V\in\mathscr{C}_i$, 设 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, $\tilde V=I_i^{-1}({}^*V)=I_{i+k}^{-1}({}^*V)\cap\tilde D_i$。而 $I_{i+k}^{-1}({}^*V)\in\mathscr{C}_{i+k}$, 故 $F\in I_{i+k}^{-1}({}^*V)\cap\tilde D_i$, $F\in\tilde V$, $F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$, $\mu_{\tilde d_{i+k}}(0)\cap\tilde D_i\subset\mu_{\tilde d_i}(0)$。($iii$) 得证。

(iv): 设 $F\in\mu_d(0)\cap\tilde D_i$, 有 $I_i^{-1}(F)=F$。任取 $\tilde V\in\mathscr{F}_{d_i}(0)$, 设 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, $\tilde V=I_i^{-1}({}^*V)$。而 $F\in{}^*V\cap\tilde D_i$, 则 $F\in I_i^{-1}({}^*V)=\tilde V$, $F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$。从而 $\mu_d(0)\cap\tilde D_i\subset\mu_{\tilde d_i}(0)$。反之, 设 $F\in\mu_{\tilde d_i}(0)$, 则对任意 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, $F\in I_i^{-1}({}^*V)$, 故 $I_i^{-1}(F)=F\in I_i^{-1}({}^*V)$, $F\in{}^*V$, $F\in\mu_d(0)$, $\mu_{\tilde d_i}(0)\subset\mu_d(0)\cap\tilde D_i$. ($iv$) 得证。

(v): 由命题2.2与上述(iii)(iv)即得。

由定理2.2, 容易验证

$$\mu_{\tilde d_i}(0)\subset\mu_d(0)\ (i\in{}^*N),\quad \bigcup_{i\in{}^*N}\mu_{\tilde d_i}(0)=\mu_d(0)\tag{5}$$

设 $i \in {}^* N$, $F \in {}^* D(\Omega)$, 记

$$[F]_i = \begin{cases} \{G \in \tilde{D}_i \ \ G - F \in \mu_{\tilde{d}_i}(0)\} & \text{若 } F \in \tilde{D}_i \\ \approx & \text{否则} \end{cases} \tag{6}$$

$$[F] = \{G \in {}^* D(\Omega) \ \ G - F \in \mu_d(0)\} \tag{7}$$

则由定理 2. 2 及(5), 下式是显然的:

$$F \in {}^* D(\Omega), [F]_i \subset [F]_{i+1} (i \in {}^* N), \quad \bigcup_{i \in {}^* N} [F]_i = [F] \tag{8}$$

设 $i \in {}^* N$, 由于 $\mu_{\tilde{d}_i}(0)$ 是 R 上的线性空间, 故记

$$(D_i)^{\wedge} = \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i) / \mu_{\tilde{d}_i}(0) \tag{9}$$

称$(D_i)^{\wedge}$为 $\tilde{D}_i$ 的非标准包, 并在$(D_i)^{\wedge}$上取商拓扑, 则$(D_i)^{\wedge}$即为一个拓扑向量空间。今后, 对$[F]_i \in (D_i)^{\wedge}$, 总设代表元为 $F \in \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$, $[F] \in (D)^{\wedge}$, 代表元为 $F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))$。

定理 2. 3　$D(\Omega)$ 的非标准包$(D)^{\wedge}$可表示为

$$(D)^{\wedge} = \{\bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j \ \ F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))\} \tag{10}$$

证明　设$[F] \in (D)^{\wedge}$, $F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))$, 则由(8), $[F] = \bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j$, 从而$[F] \in \{\bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j \ \ F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))\}$, $(D)^{\wedge} \subset \{\bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j \ \ F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))\}$。反之, 任取 $\tilde{G} \in \{\bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j \ \ F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))\}$, 则有 $F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))$, 使 $\tilde{G} = \bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j = [F] \in (D)^{\wedge}$, 即$(D)^{\wedge} \supset \{\bigcup_{j \in {}^* N} [F]_j \ \ F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))\}$。(10) 得证。

3　$(D)^{\wedge}$的性质

设 $i \in {}^* N$, 在$(D_i)^{\wedge}$与$(D)^{\wedge}$分别取商拓扑, 则由定理 2. 1, $(D_i)^{\wedge}$与$(D)^{\wedge}$为局部凸空间, 分别记其上的拓扑为 $\hat{d}_i$ 与 $\hat{d}$。设 $\theta: \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega)) \to (D)^{\wedge}$为商映射, 即

$$F \in \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega)), \theta(F) = [F] \tag{11}$$

而对 $i \in {}^* N$, 设 $\theta_i: \mathrm{fin}_{\tilde{d}}(\tilde{D}_i) \to D_i)^{\wedge}$为商映射, 即

$$F \in \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i), \theta(F) = [F]_i \tag{12}$$

记 $\mathscr{F}_{\tilde{d}}(0) = \{{}^* V \ \ V \in \mathscr{F}_d(0)\}$, $\mathscr{F}_{\tilde{d}_i}(0) = \mathscr{C} = \{I_i^{-1}({}^* V) \ \ V \in \mathscr{F}_d(0)\} (i \in N)$, 则

$$\mathscr{F}_{\tilde{d}}(0) \cap \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega)) \equiv \{\tilde{V} \cap \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega)) \ \ \tilde{V} \in \mathscr{F}_{\tilde{d}}(0)\}$$

$$\mathscr{F}_{\tilde{d}_i}(0) \cap \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i) \equiv \{\tilde{V} \cap \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i) \ \ \tilde{V} \in \mathscr{F}_{\tilde{d}_i}(0)\}$$

分别为 $\mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))$ 与 $\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)$ 上 0 的均衡凸的邻域基。故$(D)^{\wedge}$中 0 的一个邻域基为

$$\mathscr{D} = \{\theta(\tilde{V} \cap \mathrm{fin}_d({}^* D(\Omega))) \ \ \tilde{V} \in \mathscr{F}_{\tilde{d}}(0)\} \tag{13}$$

而$(D_i)^{\wedge} (i \in {}^* N)$ 中 0 的一个邻域基为

$$\mathscr{D}_i = \{\theta(\tilde{V} \cap \mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i)) \ \ \tilde{V} \in \mathscr{F}_{\tilde{d}_i}(0)\} \tag{14}$$

设 $i, j \in {}^* N$, $i \leq j$, 定义映射 $J_{ji}: (D_i)^{\wedge} \to (D_j)^{\wedge}$, 使得

$$[F]_i \in (D_i)^{\wedge}, \quad J_{ji}([F]_i = [F]_j \tag{15}$$

而对 $i \in {}^* N$, 定义映射 $J_i: (D_i)^{\wedge} \to (D)^{\wedge}$, 使

$$[F]_i \in (D_i)^{\wedge}, J_i([F]_i) = [F] \tag{16}$$

定理 3.1　下列命题成立:

(i) 设 $i,j\in{}^*N$, $i\leq j$, 则 J_{ji} 是单射, 且是连续的;

(ii) 设 $i\in{}^*N$, 则 J_i 是单射, 且是连续的。

证明　只证(i), 至于(ii), 证明是类似的。

设$[F]_i,[G]_i\in(D_i)^\wedge$, $[F]_i\neq[G]_i$, 则 $F-G\in\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)$, 但 $F-G\overline{\in}\mu_{\mathscr{D}_i}(0)$, 则由定理 2.2, $F-G\overline{\in}\mu_{\mathscr{D}_j}(0)$, $[F]_j\neq[G]_j$, 即 $J_{ji}([F]_i)\neq J_{ji}([G]_i)$, J_{ji} 是单射。下证 J_{ji} 是连续映射。对 $i,j\in{}^*N$, $i\leq j$, 设 I_{ji}: $\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)\rightarrow\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_j}(\tilde{D}_j)$ 为嵌入映射, 取相对拓扑, 易验证 I_{ji} 是连续的, 且 $\theta_j\cdot I_{ji}=J_{ji}\cdot\theta_i$, 即下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i) \arrow[r, "I_{ji}"] \arrow[d, "\theta_i"] & \mathrm{fin}_{\mathscr{D}_j}(\tilde{D}_j) \arrow[d, "\theta_j"] \\
(D_i)^\wedge \arrow[r, "J_{ji}"] & (D_j)^\wedge
\end{tikzcd}$$

任取 $U\in\hat{d}_j$, 由于 I_{ji}, θ_j 连续, 则 $I_{ji}^{-1}(\theta_j^{-1}(U))$ 为 $\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)$ 中的开集。而 $\theta_i^{-1}(J_{ji}^{-1}(U))=I_{ji}^{-1}(\theta_j^{-1}(U))$, 故 $\theta_i^{-1}(J_{ji}^{-1}(U))$ 为 $\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)$ 中的开集。而 θ_i 是开映射, 且

$$\theta_i(\theta_i^{-1}(J_{ji}^{-1}(U)))=J_{ji}^{-1}(U)\tag{17}$$

故 $J_{ji}^{-1}(U)$ 为$(D_i)^\wedge$中开集, 即 $J_{ji}^{-1}(U)\in\hat{d}_i$, 从而 J_{ji} 连续, (i) 得证。

由定理 3.1, 对 $i,j\in{}^*N$, $i\leq j$, 则可视$(D_i)^\wedge$为$(D_j)^\wedge$的子集, 而每个$(D_i)^\wedge(i\in{}^*N)$均可视为$(D)^\wedge$的子集, 在这个意义上, 即对 $i\leq j$, $F\in\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)$, 视$[F]$, $[F]_i$, $[F]_j$ 同一, 有

$$(D)^\wedge=\bigcup_{i\in{}^*N}(D_i)^\wedge\tag{18}$$

在下文中, 我们均作此假设。

定理 3.2　设 $i\in{}^*N$, 则有

(i) $\hat{d}_{i+1}\,(D_i)^\wedge=\hat{d}_i$;　　(ii) $\hat{d}\,(D_i)^\wedge=\hat{d}_i$。

证明　(i): 由 $\hat{d}_i$ 的定义, 只需证 $\mathscr{D}_{i+1}\cap(D_i)^\wedge=\mathscr{D}_i$。任取 $U\in\mathscr{D}_i$, 则有 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, 使 $U=\theta_i(I_i^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i))$。而由定理 2.2, $I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\tilde{D}_i=I_i^{-1}({}^*V)$, 则 $U=\theta_i(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i))$。又容易验证:

$\theta_{i+1}(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i))=\theta_{i+1}(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_{i+1}}(\tilde{D}_{i+1}))\cap(D_i)^\wedge=\theta_i(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i))$, 从而 $U=\theta_{i+1}(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_{i+1}}(\tilde{D}_{i+1}))\cap(\tilde{D}_i)^\wedge\in\mathscr{D}_{i+1}\cap(D_i)^\wedge$, $\mathscr{D}_i\subset\mathscr{D}_{i+1}\cap(D_i)^\wedge$。反之, 设 $U\in\mathscr{D}_{i+1}$, 则有 $V\in\mathscr{F}_d(0)$, 使 $U\cap(D_i)^\wedge=\theta_{i+1}(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_{i+1}}(\tilde{D}_{i+1}))\cap(D_i)^\wedge$, 从而 $U\cap(D_i)^\wedge=\theta(I_{i+1}^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i))=\theta_i(I_i^{-1}({}^*V)\cap\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i))\in\mathscr{D}_i$, 故 $\mathscr{D}_{i+1}\cap(D_i)^\wedge\subset\mathscr{D}_i$。这样, $\mathscr{D}_{i+1}\cap(\mathscr{D}_i)^\wedge=\mathscr{D}_i$。$(i)$ 得证。

关于(ii) 的证明是类似的。

关于 θ 与 θ_i 的性质, 我们有

定理 3.3　设对 $i\in{}^*N$, $A_i\subset\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)$, 则有

$$\bigcup_{i\in{}^*N}\theta(A_i)=\bigcup_{i\in{}^*N}\theta_i(A_i)=\theta(\bigcup_{i\in{}^*N}A_i)$$

证明　由于对 $F\in\mathrm{fin}_{\mathscr{D}_i}(\tilde{D}_i)$, $[F]$与$[F]_i$ 为同一元素, 故 $\theta_i(A_i)=\theta(A_i)$ $(i\in{}^*N)$, 从而

第一个等式显见, 至于第二个等式直接验证即可。

定理 3.4　$(D)^{\wedge}$上的拓扑$\hat{d}$是使对每个$i\in{}^{*}N$, 嵌入映射$J_i:(D_i)^{\wedge}\to(D)^{\wedge}$为连续的最强局部凸拓扑。从而$(D)^{\wedge}$是局部凸空间类$\{((D_i)^{\wedge},\hat{d}_i)\quad i\in{}^{*}N\}$的严格归纳极限。

证明　由定理 3.1, 对每个i, 关于$\hat{d}$, J_i是连续的。若$(D)^{\wedge}$另有一个局部凸拓扑d⑦, d⑦ $\hat{d}$且对每个$i\in{}^{*}N$, J_i关于d⑦是连续的。任取$(D)^{\wedge}$关于d⑦的 0 的邻域$\tilde{V}$, 则对每个$i\in{}^{*}N$, 存在$V\in\mathscr{F}_d(0)$, 使$\theta_i(I_i^{-1}({}^{*}V)\cap\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i))\subset J_i^{-1}(\tilde{V})$。由(18)易验证, $\tilde{V}=\bigcup_{j\in{}^{*}N}J_i^{-1}(\tilde{V})$, 故由定理 3.3 知, $\theta({}^{*}V\cap\mathrm{fin}_d({}^{*}D(\Omega)))\subset\bigcup_{i\in{}^{*}N}\theta_i(I_i^{-1}({}^{*}V)\cap\mathrm{fin}_{\tilde{d}_i}(\tilde{D}_i))\subset\tilde{V}$, 但$\theta({}^{*}V\cap\mathrm{fin}_d({}^{*}D(\Omega)))\in\mathscr{D}$, 故$\tilde{V}$是$(D)^{\wedge}$关于$\hat{d}$的 0 的邻域。从而$d$⑦⊂ $\hat{d}$。即d⑦= $\hat{d}$, $\hat{d}$是使每个$J_i(i\in{}^{*}N)$为连续的最强的局部凸拓扑。考虑到(18)及定理 3.2, 知$((D)^{\wedge},\hat{d})$为$\{((D_i)^{\wedge},\hat{d})\quad i\in{}^{*}N\}$的严格归纳极限。

参考文献

1 Robinson A. Non-standard analysis, North-Holland, Amsterdam, 1966

2 Henson C W and Moore L C. Jr, Trans Amer Math Soc, 1972, 172(2): 405～435

3 Render H. Trans Amer Math Soc, 1993, 336(1): 101～119

4 Todorov T. Proc Amer Math Soc, 1990, 110: 1143～1144

5 Todorov T. Proc Amer Math Soc, 1992, 114: 817～819

6 Salbany S and Todorov T. Topology and Its Appl, 1994, 56: 99～104

7 Jose Barros-Neto. An introduction to the theory of distributions, Marcel Dekker, Inc. New York, 1973

8 David M. Applied nonstandard analysis, Wiley, New York, 1979

9 刘普寅. 国防科技大学学报, 1995, 17(1): 109～116

10 刘普寅. 国防科技大学学报, 1995, 17(4): 124～131

11 李邦河. 中国科学, 1978, 8(A 辑): 1～10

12 李邦河, 李雅卿. 中国科学, 1985, 15(A 辑): 320～330