

线性核时频信号表示及其仿真*

孙孔峰 皇甫堪

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

摘要 根据 chirp 信号在模糊域的特点, 本文提出了线性核时频表示方法。这种方法在提高分辨率、消除交叉项以及抑制噪声等方面都具有较高的性能。理论分析和实验结果都证实了这种方法的有效性。

关键词 时频表示 WD, 模糊函数, chirp, 分辨率

分类号 TN911.6

The Analysis of Time-Frequency Signal and Its Experiment Investigation

Sun Kongfeng Huang Fukan

(Institute of Electronic Engineering, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, the Linear Kernel TFR is proposed according to the AF of the sum of chirp and its delayed version. The method enables us to obtain high time and frequency resolution while suppressing cross-term and minimizing the noise in the signal. Analytical and practical demonstrations have proved the validity and applicability of the proposed method.

Key words TFR, WD, AF, chirp, resolution

在地球资源勘探、雷达信号处理中, chirp (线性调频) 信号有着广泛的应用。通常发射一 chirp 信号, 通过估计回波的延迟便能推断出关于资源 (如石油、天然气等) 和目标的信息。正确地估计出激励信号和回波之间的延迟, 是这些领域所面临的一个重要课题。

chirp 信号的频率随时间而线性变化, 属于时变非平稳信号。对这类信号, 传统上采用短时傅立叶变换 (STFT) 的方法, 但当 chirp 信号的频率变化足够快时, STFT 就无

* 1996 年 12 月 18 日修订

能为力了。这是因为: (1) 为了提高频率分辨率需选取较长的滑动时间窗, 但窗越长, 窗内的信号就不能视为平稳信号。这就违背了傅里叶分析的前提。(2) 要得到较高的时间分辨率, 相应要求时窗尽量短, 但频率分辨率就较差。对这类信号, 需要同时在时间和频率上表示出来, 这种表示即时频表示 TFR (Time-Frequency Representation)。TFR 有许多种, 其中研究得较为成熟和应用较广的是 WD (Wigner Distribution)^[1,2]。WD 具有很高的时间和频率分辨率, 同时又有其它一些优良的性质。WD 对单个 chirp 信号其结果是非常理想的, 但对于两个信号的和, 由于存在交叉项, 严重地影响了信号的时频表示。关于交叉项的消除 (或减弱) 方法, 文献 [4] 进行了系统的研究, 并提出了 RID (Reduced Interference Distribution) 的概念。但文献 [4] 同时又指出, RID 并不适合于 chirp 型信号。

本文针对 chirp 型信号的特点, 提出了一种新的 TFR。这种时频表示方法能较好地分辨出 chirp 信号之间的延迟, 与其它 TFR 比较, 这种方法显示了较高的分辨率和优越性。

1 时频分析基础

1.1 WD (Wigner Distribution)

信号 $f(t)$ 的 WD 定义为^[1]:

$$W_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau/2) f^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.1)$$

WD 存在两个主要问题: 一是有负值, 这就影响了 WD 作为信号能量密度的物理解释; 二是对两个信号的和, 其 WD 存在交叉项, 交叉项出现在自主项中间, 且呈振荡状态。由于交叉项的存在, 势必会影响到时频表示的分辨率。

1.2 广义时频表示 (GTFR)

L. Cohen 提出了广义时频表示 (Generalized TFR) 的概念^[2], 其表示式为

$$P(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} j^{\alpha} e^{-j\theta + j\theta_1} \varphi(\theta, \tau) f(u + \tau/2) f^*(u - \tau/2) du d\theta d\tau \quad (1.2)$$

其中 $f(t)$ 为信号, $P(t, \omega)$ 为 $f(t)$ 的 GTFR, $\varphi(\theta, \tau)$ 为核函数, 选取不同的核便可得到不同的时频表示方法。例如核取 1、取 $e^{-\theta^2/2\sigma}$ (σ 为参数) 分别可以得到 WD^[2]、Choi-Williams 分布 (CWD)^[2,3]。适当地选取核, 可使信号的 TFR 满足人们的使用要求。

某种时频表示方法仅对某种类型的信号特别有效, 对于别的信号, 效果可能就较差。因此, 并不存在一种适用于所有信号的所谓最优时频表示方法。

GTFR 又可表示为核函数与信号的模糊函数乘积的二维傅立叶变换:

$$P(t, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta, \tau) A_f(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\omega\tau} d\theta d\tau \quad (1.3)$$

其中 $A_f(\theta, \tau)$ 为信号 $f(t)$ 的模糊函数 AF (Ambiguity Function), 它定义为

$$A_f(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau/2) f^*(t - \tau/2) e^{j\theta t} dt \quad (1.4)$$

2 基于模糊域滤波的核函数设计

2.1 信号的模糊域分析

设 $f(t)$ 为一单成分 (mono component) 信号, 即每个时刻仅有一个频率分量, $y(t)$ 为 $f(t)$ 与其延迟的线性组合, 即:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M c_i f(t - t_i) \quad t_i \quad t_j \quad (2.1)$$

根据 (1.4) 式计算 $y(t)$ 的模糊函数 $A_y(\theta, \tau)$, $A_y(\theta, \tau)$ 中将包含如下两项^[6,7]:

(1) 自主项 代表着每个分量对 $A_y(\theta, \tau)$ 的贡献:

$$A_{y_a}(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M |C_i|^2 \int f(t + \tau/2 - t_i) f^*(t - \tau/2 - t_i) e^{j\theta t} dt \quad (2.2)$$

容易求出, $f(t - t_i)$ 的 AF 是由 $f(t)$ 的 AF 乘以 $e^{j\theta t_i}$ 得到的, 也就是说 $f(t)$ 、 $f(t - t_i)$ 在模糊域位于相同的位置。

(2) 交叉项

$$A_{y_c}(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M C_k C_i^* \int f(t + \tau/2 - t_k) f^*(t - \tau/2 - t_i) e^{j\theta t} dt \quad (2.3)$$

作变量替换: $t = t + \frac{(t_k + t_i)}{2}$, 那么上式右边积分式变为:

$$e^{j\theta(t_k + t_i)/2} \int f\left[t + \frac{\tau + (t_i - t_k)}{2}\right] f^*\left[t - \frac{\tau + (t_i - t_k)}{2}\right] e^{j\theta t} dt \quad (2.4)$$

对比 $f(t)$ 的模糊函数 $A_f(\theta, \tau)$, 可以看出, 每个交叉项是由 $A_f(\theta, \tau)$ 乘以 $e^{j\theta(t_i + t_k)/2}$, 并且在模糊域平移 $(t_i - t_k) / 2$ 而得到的。

基于上述分析, 可以得到如下结论:

所有自主项在 AF 域上位于相同的位置, 而交叉项则出现在不同的位置, 且与自主项不重合。因此, 如果在 AF 域适当地选取核函数, 使得自主项得以保持, 而又能消除或减弱交叉项, 那么信号在时频域表示就会有满意的结果。这就是基于模糊域滤波核设计的基本思想。

下面我们将依据上述思想, 结合 chirp 与其延迟和的信号组合在模糊域表示的特点, 设计出一种核函数——本文称之为线性核 (linear kernel)。这种核针对 chirp 与其延迟的和这样一种信号, 在消除交叉项、提高分辨率等方面具有良好的性能。

2.2 核函数设计

对于复数 chirp 信号: $f(t) = k e^{j(\omega_0 t + \frac{1}{2}\omega^2 t^2)}$

其模糊函数由下式给出:

$$A_f(\theta, \tau) = k^2 \delta(\theta + \alpha\tau) e^{j\omega_0\tau}$$

显然, 这时 AF 仅在直线 $\theta + \alpha\tau = 0$ 上有值, 而在 AF 域的其余地方均为 0。当离散实现时, 有值范围将不再是一条直线, 而是围绕这条直线的一个带。图 1 (a) 示出了一个 128 点离散 chirp 信号的 AF 分布情况, 其信号形式由下式给出:

$$f(n) = \sin(2\pi \times 0.0019n^2) u(n)$$

图 1 (b) 为 $f(n)$ 延迟 8 个采样点时的 AF, 由图可见它与原始 chirp 信号在 AF 域重合。当 chirp 中包含有 Gaussian 白噪声时, 其 AF 分布情况见图 1 (c)。由于噪声的存在, AF 不再集中在一个带内, 而是散布在整个 AF 平面上。图 1 (d) 为 chirp 与其延迟 32 个采样的和的 AF。很明显, 自主项重合在一起, 交叉项则分别位于自主项的两侧。

根据 chirp 信号在 AF 域分布的特点, 我们这样构造核函数: 在包含自主项的区域, 核取值 1, 而在其它地方则取 0, 即:

$$\varphi(\theta, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{对于 } |\tau + \theta \beta| \leq T/2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

这种核称之为线性核 LK (linear kernel), 与这种核相对应的时频表示称为线性核表示 (LKR) (Linear kernel Representation)。其中 β 、 T 为参数, β 决定着带的斜率, T 控制着带的宽度。这样选取核, 将最大限度地保留自主项, 并且最大限度地消除交叉项, 同时也使噪声得到有效的抑制。在具体计算时, 核离散化为:

$$\varphi(l, m) = \begin{cases} 1 & \text{对于 } |m + l/\beta| \leq M/2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在实际计算时, 核在通带内其值不仅可以取恒定值 1 (这相当于矩形窗), 也可以取其它类型的窗函数, 以便得到最优的结果。

为了进行比较, 图 2 示出了在 AF 域 LKR 和 RID 的核形状。由图可见, RID 的核在 AF 域上是位于 θ 轴和 τ 轴附近, 而 LKR 的核为具有一定斜率的一个带, 而这带的形状正好与图 1 (d) 中 chirp 与其延迟和的信号组合在 AF 域上的自主项相匹配。

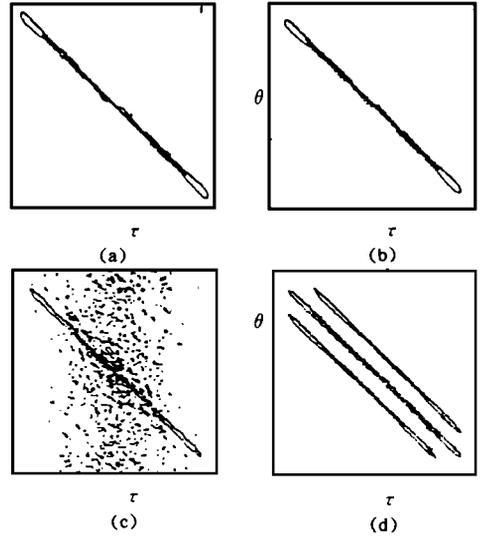


图 1 信号 AF 域的等值线图

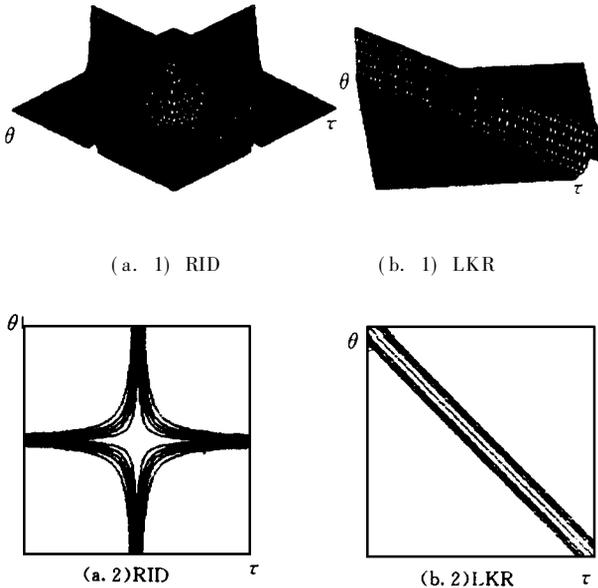


图 2 RID 和 LKR (Hamming 窗) 的核比较

3 实验结果

仿真一个包含 chirp 与其延迟和的离散信号:

$$f(n) = \sin(2\pi \times 0.0019n^2)u(n) + \sin[2\pi \times 0.0019(n - n_0)^2]u(n - n_0)$$

其中 $u(n)$ 为单位阶跃信号。由 $f(n)$ 的表示式可知, 它是由两个瞬时频率按同样速率线性增加而在时间上相距为 n_0 的两个 chirp 信号组成的。

3.1 当 $n_0 = 16$ 时

分别计算 $f(n)$ 的 WD、LKR 和 CWD, 图 3 (a) 为 WD 的等值线图, 使用 LKR 的结果示于图 3 (b), 其核参数取 $\beta = 1, M = 7$, 3 (c)、3 (d) 分别为 σ 取 10^6 、200 时 CWD 的结果。很显然, LKR 能够明确地分离出两个信号, WD 在两个信号之间出现较大的交叉项, 交叉项不仅影响时频表示的物理解释, 同时也使可分辨的最小间隔受到限制。对于 CWD, 其核函数为 $e^{-\theta^2 t^2 / \sigma}$ (见文[3, 7]), 当 σ 很大时, 核在 AF 域衰减很慢, 且接近于 1, 即和 WD 很相似。对比图 3 (c) 和 3 (a) 可以看出两者基本相同; 当 σ 减小到 200 时, 核变为一低通滤波器, 在 AF 域上只保留两个坐标轴附近的值。这样尽管交叉项得到一定程度的减弱, 但信号的自主项却被削去了大部分, 表现在时频域上, 即为自主项展宽了, 变得十分不集中, 这同样也影响分辨信号的能力。图 3 (d) 清楚地说明了这一点, 当信号中含有高斯噪声时 (SNR= 1), WD、LKR、CWD ($\sigma = 10^6$) 和 CWD ($\sigma = 200$) 的分析结果分别示于图 3 (e), (f), (g) 和 (h)。由此可见, 由于噪声的存在, WD 的结果变得十分模糊; 对于 CWD, 当 σ 很大时, 仍和 WD 相似, σ 较小时, 尽管噪声得到一定程度的抑制, 但自主项亦受到严重的污损, 很难分辨出两个信号来; LKR 仍能明确地区分出两个信号。

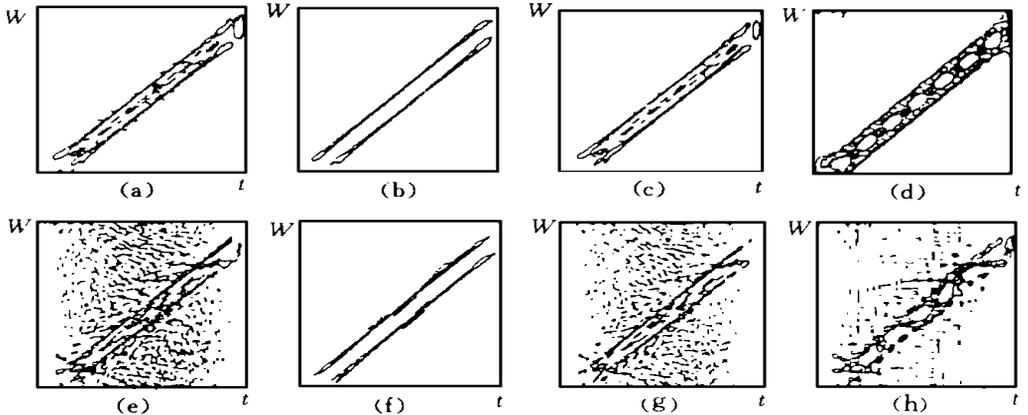


图 3 两个 chirp 信号和的时频表示等值线图 (延迟为 16 个采样)

3.2 $n_0 = 8$

当两个信号延迟为 8 个采样时, WD、CWD ($\sigma = 10^6$) 和 CWD ($\sigma = 200$) 的分析结果分别示于图 4 (a)、(b) 和 (c)。由图可见, 这两种时频表示均不能分辨出两个信号

之间的延迟。对于 WD, 这个结果是容易理解的, 因为在时频域上, WD 的交叉项出现在自主项中间, 当两个自主项相距很近时, 就会和交叉项混在一起。对于 CWD, 根据 3.1 的分析, 也不难理解其结果。当采用 LKR 时, 其结果示于图 4 (d), 可见 LKR 在分辨两个 chirp 信号之间的延迟方面十分优越。

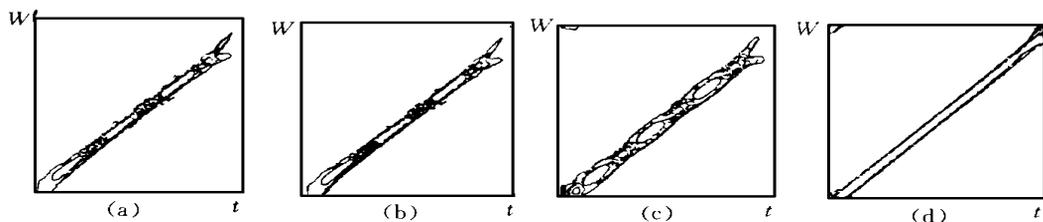


图 4 两个 chirp 信号和 (延迟为 8 个采样) 的 TFR 等值线图

4 结 论

对于 chirp 与其延迟的和的信号组合, 在 AF 域其自主项重合在一起, 而交叉项相互分开且不与自主项重合。基于这一事实, 只保留自主项而设计出的核——线性核, 能够较好地消除交叉项, 同时其时频表示具有很高的分辨率, 并且也使噪声得到有效的抑制。对于同样的信号组合, 如采用 WD, 由于交叉项的存在, 不仅降低了分辨率, 而且也影响了时频表示作为能量密度的物理解释。如采用 CWD, 当 σ 较大时, 其结果和 WD 相似。当 σ 较小时, 核函数在 AF 域为“低通滤波器型”。尽管这时交叉项得到一定程度的减弱, 但自主项也被削去了大部分, 在时频域就表现为自主项的展宽, 因而也影响分辨率。理论分析和实验结果都证实了 LKR 时频表示方法在分析 chirp 型信号方面是有效的。

参 考 文 献

- 1 Classen T A C M, Mecklenbrauker W F G. The Wigner Distribution- A tool for time-frequency signal analysis, Parts I, Philips J. Res., 1980, 35: 217 ~ 250, 276 ~ 300, 372 ~ 389
- 2 Cohen L. Time-Frequency Distribution- A review. Proc. IEEE, 1989, 77 (7): 941 ~ 981
- 3 Choi H, Williams W J. Improved time-frequency representation of multicomponent signal using exponential kernels. IEEE Trans. ASSP, 1989, 37 (6): 862 ~ 871
- 4 Jeong J, Williams W J. Kernel design for reduced interference distribution. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40 (2): 402 ~ 412
- 5 Zhao Y, et al: The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. IEEE Trans. ASSP: 1990, 38 (7): 1084 ~ 1091
- 6 Perez T A, et al. Optimal time-frequency representation of monocomponent signal combinations. Signal Processing, 1994, 38 (2): 187 ~ 195
- 7 Hlawatsch F, et al. Smoothed Pseudo-Wigner Distribution Choi-Williams Distribution and Cone-kernel representation: Ambiguity-domain analysis and experimental comparison. Signal Processing, 1995, 43 (2): 149 ~ 168

(责任编辑 潘 生)