

模态试验中非线性检测的一种方法及应用^{*}

谭志勇

张东升

(北京强度与环境研究所 北京 100076) (国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 本文利用振动信号实部与虚部之间 Hilbert 关系的原理,发展了它在模态试验中非线性检测技术。针对工程结构的特性采用了快速算法和修正技术,通过火箭风罩证明了它的实用性。

关键词 模态分析,非线性振动,Hilbert 变换

分类号 TB123

A Sort of Inspecting Method for Nonlinear Vibration in Structural Model Test and Its Application

Tan Zhiyong

(Beijing Institute of Structure Environment Engineering, Beijing, 10076)

Zhang Dongsheng

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, based on the principle of Hilbert connection for real and imaginary part of vibration signals, the inspecting technique for nonlinear vibration was developed. In accordance with the special characteristics of engineering structure, a sort of fast algorithm and correction technique was used. By application in a fairing of rocket, it was proved practicable.

Key Words modal analysis, nonlinear vibration, Hilbert transformation

在模态试验中,工程结构的不断发展已涉及到许多非线性问题,尤其是局部振动非线性特性已不可忽视。从 80 年代中期,利用 Hilbert 变换已成为非线性检测的一种手段。Simon 等^[1,2]首先由复变函数理论推导了信号频响函数(FRF)的 Hilbert 变换(HT)关系,认为只有在线性系统中 FRF 的实部可由虚部唯一确定,同时虚部也可由实部唯一确定。但实测公式由于截断效应因而误差较大,变换作为采样频率的函数,计算量大,故实用性较差;VINH 等^[3]的工作对截断效应建议采用统计因素法进行修正;Rodeman^[4]进一步对

* 1996 年 9 月 7 日收稿

HT 的本质进行了分析, 认为符合这种变换的信号关系必须是稳定的, 信号应具有因果性, 它在时域中的表示必须是实数形式。

1 测试原理和方法

将实时域信号的离散形式 $h(n)$ 分解成偶对称 $h_e(n)$ 和奇对称 $h_o(n)$ 序列之和, 则 $h(n)$ 可写成:

$$h(n) = h_e(n)u_+(n), \quad u_+(n) = \begin{cases} 2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1a)$$

或者写成
$$h(n) = h_o(n)u_+(n) + h(0)\delta(n) \quad (1b)$$

当 $h(n)$ 满足因果和稳定条件时, 可采用 Cauchy 积分, 使得 $h(n)$ 的 Z 变换 $H(z)$ 在单位圆外部收敛域任一点都可以由圆上的实部 $H_R(e^{j\omega})$ 确定, 或由虚部 $H_I(e^{j\omega})$ 、 $h(0)$ 共同确定 (T 为采样周期)。若令 $z = re^{j\omega T}$ (其中 $r > 1$), 由 (1a) 式 $H(z)$ 可以写成:

$$H(Z) \Big|_{z=re^{j\omega T}} = H(re^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)(re^{j\omega T})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_e(n)[u_+(n)r^{-n}]e^{-j\omega n T} \quad (2)$$

(2) 式等于 $h_e(n)$ 与 $[r^{-n}u_+(n)]$ 乘积的 Fourier 变换, 利用复卷积定理可得到 $H(z)$ 沿单位圆的线积分, 换算成采样频率 ω 的积分限后, 即得到变换的虚部分量表示:

$$H_I(re^{j\omega T}) = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} H_R(e^{j\theta}) Q_r(\theta - \omega) d\theta \quad (3)$$

同理, 由 (1b) 式的 Z 变换和复卷积公式, 可得到变换的实部表示:

$$H_R(re^{j\omega T}) = -\frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} H_I(e^{j\theta}) Q_r(\theta - \omega) d\theta + h(0) \operatorname{sign}[H_I(e^{j\omega T})] \quad (4)$$

式中 $Q_r(\theta - \omega)$ 为由 $[r^{-n}u_+(n)]$ 的 Z 变换得到的积分核, 有

$$Q_r(\theta - \omega) = \frac{2r^{-1} \sin(\theta - \omega)T}{1 - 2r^{-1} \cos(\theta - \omega)T + r^{-2}} \quad (5)$$

在文 [1] ~ [3] 中得到的公式与 (3)、(4) 类似, 然后即直接进行了 HT 的离散数值计算。可以看出, (3)、(4) 式由于与采样频率 ω 相关是不便于实用的。为此作进一步的分析可对 (3) 式求 $r \rightarrow 1$ 的极限, 交换次序后即可求出 $Q_r(\theta - \omega)$ 的极限为 $\operatorname{ctg} \frac{(\theta - \omega)T}{2}$, 则 (3) 式可推导为:

$$H_I(re^{j\omega T}) = \frac{P}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} H_R(e^{j\theta}) \operatorname{ctg} \frac{(\theta - \omega)T}{2} d\theta \quad (6)$$

式中 P 为 $\theta = \omega$ 奇异点的极值。由于实测中不存在 $\omega < 0$ 的实际信号, 可进一步将 (3)、(4) 式分解成 $-\frac{\omega}{2} \sim 0$ 和 $0 \sim \frac{\omega}{2}$ 两段积分之和, 利用对称关系消除负时域的信号, 然后代入 $\omega = \theta$ 的离散点及积分离散计算公式, 设 N 为实测信号长度, 则得到任一采样点 k 的变换虚部为:

$$H_I(k) = -\frac{P}{N} \sin \frac{\pi k}{N} \sum_{i=0}^N \left[H_R(i) / \left(\cos \frac{\pi i}{N} - \cos \frac{\pi k}{N} \right) \right] \quad (7)$$

对(4)式进行类似推导,考虑到时域初始项 $h(0)$ 通常是未知的,故将其忽略而得到近似表示:

$$H_R(k) \approx \frac{P}{N} \sum_{i=0}^N \left[H_I(i) / \sin \frac{\pi i}{N} / (\cos \frac{\pi i}{N} - \cos \frac{\pi k}{N}) \right] \quad (8)$$

在(7)、(8)式中,变换公式只与实测序列的长度相关而与抽样周期 T 无关,这样就可以方便应用在各种采样条件下。(8)式由于忽略了时域中的初时值因此计算精度较(4)式差,在文[1]、[2]的算例中表现出这一现象,但没能说明原因。

2 HT 方法的快速算法推广和在实用中的修正

采用(7)、(8)式变换很大的一个缺点是计算量较大。变换对于每一个离散点都需要各进行 N 次余弦、减法和除法运算,对整个序列则要作 $3N^2$ 次运算,其运算大大多于 FFT 所需的 $2N \log_2 N$ 次运算耗时,这就限制了它的实时监测作用。为此,考虑采用快速离散对前述算法进行修正。由式中看出,算法受限制而不能进行类似 FFT 运算的关键在于存在乘、加混合运算,而加法是考虑到积分关于时域的对称性所得。若对(6)式不进行负时域的对称变换而是直接数值计算,可得到:

$$H_I(k) = \frac{P}{N} \sum_{i=0}^N \left[H_R(i) \operatorname{ctg} \frac{\pi(i-k)}{N} \right] \quad (9)$$

此时实测为 $\frac{N}{2} + 1 \sim N$ 的信号,求积域需要由(6)式进行平移获得。其中 $\frac{N}{2} + 1 \sim i$ N 对应(9)式中实测信号; $1 \sim i \sim \frac{N}{2}$ 为原负时域信号且利用奇偶对称性加以确定。(9)式在频域中的卷积求和对应于 $H_R(i)$ 与 $\operatorname{ctg} \frac{\pi i}{N}$ 在时域中的乘积。利用卷积定理,通过 Fourier 逆变换将(9)式右端在时域进行简便的乘法运算后变换回频域则得到快速算法:

$$H_I(k) = \frac{P}{N} \text{FFT} \{ \text{IFFT} [H_R(k)] \cdot \text{IFFT} (\operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}) \} \quad (10)$$

同样对于 FRF 虚部的 HT 公式可得到快速算式为:

$$H_R(k) = - \frac{P}{N} \text{FFT} \{ \text{IFFT} [H_I(k) \sin \frac{\pi k}{N}] \cdot \text{IFFT} (\operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}) \} \quad (11)$$

需要注意的是由于在(10)、(11)式的推导中近似了卷积条件,即乘积域由 $(-\infty, +\infty)$ 近似为 $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$, 较之前面的常规算法会产生方法误差的积累。因此使用前应判断只有当采样足够长且 $j \ll N$ 时,有 $H_R(k), H_I(k) \approx 0$, 才能保证足够的精度。由于采样长度的限制将产生剩余模态和截断效应的影响,对此在变换比较以前必须消除。文[1]、[2]中对截断的 FRF 采用假设显式函数并求其在无穷域上定积分的方法且不考虑剩余模态,显然这对于实际为连续体的大型结构是不可实用的。

剩余模态是采样频率以外的其它主频特性在采样数据中的影响,在 FRF 中可表示为:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{K_{er}} \left[\frac{1 - \bar{\omega}^2}{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + g_r^2} - j \frac{g_r}{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + g_r^2} \right] + (H_R^f + jH_I^f) \quad (12)$$

一般情况下, H_k^F 和 H_k^F 可以认为是与频率无关的常数, 亦可认为是频率 ω 的线性函数, 这样就可以通过图解分析法或计算机拟合求出其值, 从原始采样数据中予以删除。

截断效应是指采样内的频段特性不完全包含在采样数据中, 由于实采长度有限而造成了“泄露”, 这是 HT 法能否实用性的关键。因此对于复杂的 FRF 数据, 首先要求阶次耦合的数据应包含在同一采样段之中。由于 HT 公式与采样频率无关, 可以调整采样间隔以便选择合适的采样频宽, 即可减少截断效应。同时, 采用定积分的整体比较代替各离散点的比较可减少截断效应的边缘值。对应于(7)式, 设变换前后的 FRF 虚部分别为 $H_I(k)$ 和 $\tilde{H}_I(k)$, 则有

$$m = \int_{s_0}^{\omega} |\tilde{H}_I(\omega) - H_I(\omega)| e^{-(\omega - \omega_0)^2} d\omega \quad (13a)$$

$$\text{其中} \quad \omega = \int_{s_0}^{\omega} \omega |\tilde{H}_I(\omega) - H_I(\omega)| d\omega \quad \omega_{2\sigma} \tilde{H}_I(\omega) - H_I(\omega) d\omega \quad (13b)$$

3 实际应用举例

文[4]证明满足 HT 的系统必须是时域因果的, 反映在本文推导即是 FRF 需满足关于时间的对称性和反对称性要求, 同时还要求系统的响应必须是稳定的。本文推导得出: 结构在稳态正弦激励下的响应可以进行周期延拓, 能够满足因果和稳定性要求; 而对于随机激励和脉冲激励的响应则不能满足。这就对试验状态提出了要求。

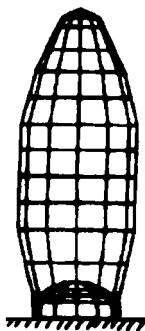


图1 某型号风罩示意图

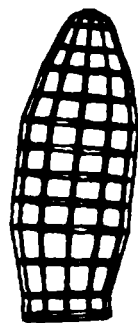


图2 标准一阶弯曲示意图

HT 对于不同的非线性条件具有不同的图形特性, 文[1]等已分别阐述了摩擦阻尼、间隙等条件下的变换图形特性, 但都基于电路仿真所形成的传递函数。本文对此进行了实用研究, 即利用多点激振系统在对某火箭的风罩进行模态试验时, 人为地造成非线性条件并用 HT 方法进行检测。

如图 1 所示, 风罩由两个半罩体用联接螺栓紧固而成, 正常试验状态下将整罩底框固定在刚性支座上。由稳态正弦测得其一阶弯曲, 拟合修正后的标准振型如图 2 示。为形成非线性, 人为地将所有固支螺栓调节至原预紧状态的 1/3, 由于松动而实测的一阶弯曲如图 3 示。其特点为风罩在底框联接面产生明显的横向剪切运动, 同时风罩间有松动引起的相对运动, 振型与图 2 明显不同。此时有理由确定风罩部件间在振动中已表现出间隙特性, 按本文(7)式推导作该主频两侧的非线性检测如图 4 所示, 看出 FRF 的实测数据与变

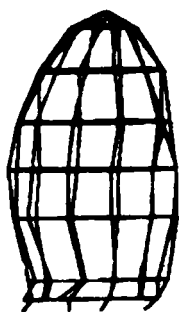


图 3 人为放松联接件后的实测振型

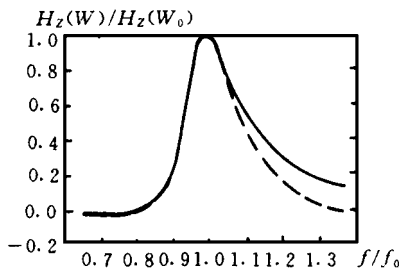


图 4 对应于图 3 的 HT 比较

(- 实测信号, - 变换计算信号)

换数据间已产生了明显的差异, 从而证实了由主模态振型分析得出的结果。

参考文献

- 1 Simon M, Tomlinson G R. Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Nonlinear Structures. Sound and Vibration, 1984, 96(3)
- 2 Tomlinson G R. Using the Hilbert Transform with Linera and Nonliner a Multi- mode System. IMAC Proceedings, 1986
- 3 Ving T, Haoui A, Chevalier Y. Extension of Modal Analysis to Nonlinear Strucure By Using Hilbert T transform. 33th AIAA/ASME/ASCE/ASC SSDM Conference, 1992
- 4 Rodeman R. Hilbert T transform Implication for Modal Analysis. 34th AIAA/ASME/ASCE/ASC SSDM Conference, 1993

(责任编辑 石少平)