

基于转移费用矩阵的机器人路径规划方法^{*}

吴尔辉 沈林成 常文森

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 本文描述了机器人路径规划的一种新方法:基于转移费用矩阵的机器人路径规划方法。通过定义转移费用矩阵的概念及其上的二元运算,将最优路径的生成,转化为矩阵的运算,使得有限步的矩阵运算,即可得到环境中所有点间的最优路径,达到了在预处理阶段构造最优路径集的目的。最后,介绍了该方法在移动机器人任务规划中的应用。

关键词 移动机器人, 路径规划, 转移费用矩阵, 广义胞映射, 地形

分类号 TP242, O221

Transition Cost Matrix Based Approach to Robot Path Planning

Wu Erhui Shen Lincheng Chang Wensen

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper describes a new approach to robot path planning: the transition cost matrix based approach. By defining the concept of transition cost matrix and the 2-ary operator on the transition cost matrix, the optimum paths are generated from the operations on the matrix, thus the optimum paths between all points in the environment can be achieved via limited matrix operations to attain the aim of constructing the optimum path set at the preprocessing stage. The paper ends with the application of the proposed approach for mobile robots' mission planning.

Key words mobile robot, path planning, transition cost matrix, generalized cell-to-cell mapping, terrain

非线性动力学系统的数值研究中,由于计算机表示数的方法,使得状态空间被表达为很多微小超立方体构成的集合,把这种模型“粗粒化”,导致所谓“胞”,胞的概念见文献[1],这个概念是Hsu(徐皆苏)建立胞映射方法的基础。定常非线性系统的状态演化,表现

* 1997年2月20日收稿

为系统在各胞之间的转移,各胞间转移由转移概率矩阵描述,转移概率矩阵决定了系统的发展演化。我们注意到,移动机器人规划算法依赖于地形环境的特定表达方法[2],一般而言,地形环境可表达为一个个类似于胞的地形单元,这些地形单元只在边界处重叠,而且反映机器人在相邻地形单元之间运动的费用是可以得到的,称这种费用为一步转移费用。借助问题表达上的相似性,本文得到了一种求解机器人路径规划的新方法。

本文在考察一步转移费用所表达的关于最优路径和最小费用的特定意义基础上,根据广义胞映射的转移概率矩阵[1]的含义,提出了转移费用矩阵的概念,并将一步转移费用所表达的意义推广到 n 步转移费用上,从而得到了求解最优路径的一种思路。通过定义转移费用矩阵上的二元运算,将最优路径集的构造,转化为转移费用矩阵序列的构造。在文章的最后,探讨了该方法在移动机器人任务规划中的应用。

1 转移费用矩阵的概念

设地形环境被表达为 N 个地形单元,反映机器人在相邻地形单元之间的一步转移费用(定常)也确定下来。以这 N 个地形单元为节点,则构成一个加权图。这个图的边反映了节点之间的可通行性,边所附的权值为机器人在这两个地形单元之间移动所需的费用。这里不考虑自圈和孤立点,并假设费用与转移方向无关,因此这个加权图的基础图为一简单连通加权图。下面的论述都是基于这个加权图进行的。

现将这 N 个地形单元编号, $j = 1, 2, \dots, N$ 。这种形式把地形环境改造成有限个胞(地形单元)构成的胞空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 。胞 j 到 i 的一步转移费用记为 c_{ij} , 转移费用构成一个矩阵,记为 $C = [c_{ij}]$,显然 C 为对称矩阵。记 M 为充分大的实数。对于矩阵 C :

- (1) 若由胞 j 到胞 i 不能经一步转移完成, $c_{ij} = M$;
- (2) 若由胞 j 到胞 i 可经一步转移完成, c_{ij} 反映了机器人由 j 一步转移到 i 的费用, $c_{ij} < M$;
- (3) 约定 $c_{jj} = M, j \in S$ 。

在广义胞映射理论中,定常非线性系统的状态演化完全由一步转移概率矩阵确定。这里, C 矩阵也可以看成一种转移概率矩阵,对于给定的 j , c_{ij} 量度了由 j 一步转移至 i 的可能性大小,显然这种可能性与 c_{ij} 的大小成某种反比例关系。如果将机器人在地形单元中的运动,看着动力学系统的状态演化,则这个系统的演化发展可由 C 矩阵描述,或者说, C 矩阵决定了地形单元间的最优路径。事实上, c_{ij} 具有如下的意义:

意义 1:

(1) $c_{ij} = M$ 表明:

- 1) j 到 i 不可能经 1 步转移而完成;
- 2) j 到 i 不存在长度为 1 的最优路径。

(2) $c_{ij} < M$, 即 $c_{ij} < M$, 表明:

- 1) 机器人由 j 到 i 的转移可 1 步完成;
- 2) c_{ij} 为机器人完成这个转移的最小费用;
- 3) 序偶 $\langle j, i \rangle$ 是由 j 转移到 i 的长度为 1 的最优路径。

称 C 为一步转移费用矩阵。因此,如果我们定义一种变换,作用于一步转移费用矩阵

C , 产生一个转移费用矩阵的序列, 记为 $C^{(1)} = C, C^{(2)}, \dots, C^{(n)}$, 其中 $C^{(n)}$ 称为 n 步转移费用矩阵, 使它具有意义 2.

意义 2:

(1) $C_{ij}^{(n)} = M$ 表明:

- 1) 机器人不可能经 n 步转移由 j 到达 i ;
- 2) 不存在由 j 到 i 的长度为 n 的最优路径。

(2) $C_{ij}^{(n)} = M$ 表明:

- 1) 机器人由 j 到 i 的转移可在 n 之内步完成;
- 2) $C_{ij}^{(n)}$ 为机器人完成这个 n 步转移的最小费用。

那么只要跟踪 $C_{ij}^{(n)}$ 形成的过程, 即可得到在 n 步之内由 j 至 i 的最优路径, 同时 $C_{ij}^{(n)}$ 为这条路径的费用。而由于由 N 个地形单元构成的加权图上边的数量有限, 可以预料在有限步之内, 即可得到所有点间的最优路径及其费用。

广义胞映射理论和机器人路径规划问题的有关概念的比较见表 1。

表 1

	广义胞映射	机器人路径规划
状态空间	R^n 中有限区域划分成的 N 个胞	有限的地形环境表达成的 N 个地形单元
状态变量	$X(0) = (x_1(0), \dots, x_N(0))^T$ $t = 0$ 时刻系统位于各胞的概率	$X(0) = (0_1, \dots, 0_{j-1}, 1_j, 0_{j+1}, \dots, 0_N)^T$ $t = 0$ 时刻机器人位于第 j 个地形单元
转移矩阵	$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]_{N \times N}$, $p_{ij}^{(n)}$ 描述由 j 经 n 步转移至 i 的概率	$C^{(n)} = [c_{ij}^{(n)}]_{N \times N}$, $c_{ij}^{(n)}$ 为机器人在 n 步之内由 j 转移至 i 所需费用
系统方程	$X(n) = P^{(n)} X(0)$ $t = n$ 时刻系统位于各胞的概率	$X(n) = C^{(n)} X(0) = (c_{1j}^{(n)}, \dots, c_{ij}^{(n)}, \dots, c_{Nj}^{(n)})^T$ 由特定地形单元 j 出发的 $t = n$ 时刻机器人位于各胞所需的费用

需要指出的是, $c_{ij}^{(n)}$ 是由 j 至多经 n 步转移到 i 所需的最小费用, 这个费用不一定是由 j 到 i 的最小费用, 或者说, 由 j 到 i 的长度为 n 的最优路径不一定是 j 到 i 的最优路径。

2 转移费用矩阵序列的构造和最优路径集的生成

定义二元运算符 \leftarrow 和 \dot{Y} , 以生成如下的矩阵序列:

$$D^{(1)} = C^{(1)} = [d_{ij}^{(1)}]_{N \times N} \dots$$

$$D^{(n)} = D^{(n-1)} \leftarrow C^{(1)} = [d_{ij}^{(n)}]_{N \times N}$$

而 $d_{ij}^{(n)} = \min\{\min_k \{d_{ik}^{(n-1)} \dot{Y} C_{kj}^{(1)}\}, d_{ij}^{(n-1)}\}$, 其中 S 为胞空间, \dot{Y} 具有如下含义:

- (1) if $d_{ik}^{(n-1)} = M, C_{kj}^{(1)} = M$, then $d_{ik}^{(n-1)} \dot{Y} C_{kj}^{(1)} = d_{ik}^{(n-1)} + C_{kj}^{(1)}$;
- (2) if $d_{ik}^{(n-1)} = M$ or $C_{kj}^{(1)} = M$, then $d_{ik}^{(n-1)} \dot{Y} C_{kj}^{(1)} = M$;
- (3) for all $j \in S$, let $d_{jj}^{(n)} = M$;

定理 1

$D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(n)}$ 具有意义 2.

采用数学归纳法即可证明该定理, 限于篇幅, 证明从略。

由于定义了转移费用矩阵上的二元运算, 我们构造了具有意义 2 的转移费用矩阵序

列。由于 N 个地形单元构成的加权图上边的数量有限,即其上的最优路径的长度有限,则:

结论 1

由 N 个地形单元构成的加权图,其边的数量为 N_e ,则转移费用矩阵序列最多构造至 $C^{(N_e)}$,即可表达出所有地形单元间的最小费用。

设转移费用矩阵序列中表达出所有地形单元间最小费用的矩阵为 $C^{(end)}$ 。对 N 个地形单元构成的加权图,由于只考虑其基础图为简单连通图这一情况,所以对 $C^{(end)}$ 的形式,有如下的结论:

结论 2

$C^{(end)}$ 的对角线元素全为 M ,而 $\forall i, j \in S, i \neq j$ 时, $c_{ij}^{(end)}$ 不等于 M 。

关于由 j 至 i 长度为 n 的最优路径与由 j 至 i 的最优路径的关系,有如下的结论:

结论 3

如果 $c_{ij}^{(n)} < M$,且 $c_{ij}^{(n)}$ 不是由 j 至 i 的最小费用,则最优路径的长度大于 n 。

由 N 个地形单元构成的连通图 $G = (S, E)$, S 为胞空间(节点的集合), E 为边的集合。设 $T_{ij}^{(p)}$ 表示由 j 到 i 的长度不超过 p 的最优路径。 $T_{ij}^{(p)}$ 为其经过的地形单元的序列所表达的一个序偶,并且定义:若 $T_{ij}^{(p)} = \langle x_1, \dots, x_m, \dots, x_p, x_{p+1} \rangle, x_m \in S, 1 \leq m \leq p$,边 $(x_m, x_{m+1}) \in E$,且 $x_1 = k, x_{p+1} = i$,则:

(1) $T_{ij}^{(p+1)} = j + T_{ik}^{(p)}$ 表示 $T_{ij}^{(p+1)} = \langle j, x_1, \dots, x_p, x_{p+1} \rangle$;

(2) $T_{ik}^{(p+1)} = T_{ik}^{(p)}$ 表示 $T_{ik}^{(p+1)} = \langle x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1} \rangle$;

(3) $T_{ik}^{(p+1)} = - T_{kj}^{(p)}$ 表示 $T_{ik}^{(p+1)} = \langle x_{p+1}, x_p, \dots, x_2, x_1 \rangle$ 。

下面给出求解最优路径集的算法。记循环变量为 p , $T_{ij}^{(p)}$ 被更新的次数计数器为 $count$ 。

求解最优路径集的算法:

step1:

根据形成的加权图,构造胞空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 和一步转移费用矩阵 $C^{(p)}, p = 1, count = 0$,并据 $C^{(p)}$ 初始化 $T_{ij}^{(p)}$:

$\forall i, j \in S$: 如果 $c_{ij}^{(p)} < M$,则 $T_{ij}^{(p)} = \langle j, i \rangle$, $count = count + 1$; 否则, $T_{ij}^{(p)}$ 为空。

step2:

如果 $count$ 等于零,则转 step5, 否则 $count = 0$, 继续。

step3:

计算 $C^{(p+1)} = C^{(p)} \leftarrow C^{(1)}$, 其中:

(1) $c_{ij}^{(p+1)} = M, T_{ij}^{(p+1)} = T_{ij}^{(p)}, \forall j \in S$ 。

(2) 计算 $c_{ij}^{(p+1)}$, 有两种情况:

1) $c_{ij}^{(p)} = M$, 此时 $c_{ij}^{(p+1)} = \min\{\min_k \{c_{ik}^{(p)} \dot{\vee} c_{kj}^{(1)}\}, M\}$ 。如果 $c_{ij}^{(p+1)} = M$, 则 $T_{ij}^{(p+1)} = T_{ij}^{(p)}$; 如果 $c_{ij}^{(p+1)} < M$, 说明机器人首次由 j 到达 i , 令这个到达由于 $k_0 \in S$ 而引起, 即 $c_{ij}^{(p+1)} = c_{ik_0}^{(p)} \dot{\vee} c_{k_0j}^{(1)}, k_0 \in S$, 则 $T_{ij}^{(p+1)} = j + T_{ik_0}^{(p)}, count = count + 1$ 。

2) $c_{ij}^{(p)} < M$, 由 $c_{ij}^{(p+1)} = \min\{\min_k \{c_{ik}^{(p)} \dot{\vee} c_{kj}^{(1)}\}, c_{ij}^{(p)}\}$ 知, 如果 $c_{ij}^{(p+1)} = c_{ij}^{(p)}$, 则 $T_{ij}^{(p+1)} = T_{ij}^{(p)}$;

如果 $c_{ij}^{(p+1)} < c_{ij}^{(p)}$, 令这个到达由 $k_0 \in S$ 而引起, 即 $c_{ij}^{(p+1)} = c_{k_0}^{(p)} \dot{\gamma} c_{k_0 j}^{(1)}$, $k_0 \in S$, 则 $T_{ij}^{(p+1)} = j + T_{k_0}^{(p)}$, $count = count + 1$.

step4:

$p = p + 1$, 转 step2.

step5:

输出 $c_{ij}^{(p)}$, $T_{ij}^{(p)}$, $i, j \in S$.

设由 N 个地形单元构成的加权图, 其边的数量为 N_e , 对于以上算法, 以一次 $\dot{\gamma}$ 运算为度量单位, 可知其时间复杂性为 $O(N^3 N_e)$.

3 应用

移动机器人作战任务规划的中心工作, 是根据其有关性能、地理数据、敌方防御、导航要求、时间限制等约束条件, 进行最佳航线的选择。这些航线应使其以高的成功概率到达目标, 同时所冒的风险不超出一定的限度。这里, 风险主要来源于敌方防御系统、与地面上的障碍物相撞等。由于移动机器人任务规划所依据的地形环境范围巨大、规划约束条件众多、以及多出发点多目标点的作战计划的近实时提交特点, 这就决定了任务规划必然采用分层规划的方法^[3]。我们在较高的规划层次上应用本文提出的方法, 求解出战场环境中所有点间的最优运动走廊, 以提交给较低规划层次进行更为细致的规划。

我们考虑 $170\text{km} \times 170\text{km}$ 的地形环境, 以 $10\text{km} \times 10\text{km}$ 的网络分割该区域(文献[4]中采用 $5\text{n mile} \times 5\text{n mile}$ 的网络)。为简化处理, 移动机器人在网络中转移的费用(代价)只计被威胁杀伤的概率和与地面障碍物相撞的概率:

- (1) 杀伤概率与机器人和敌威胁中心的距离成反比例关系;
- (2) 地形遮蔽可使其避开敌方防御系统的杀伤;
- (3) 碰地概率是地形粗糙度和障碍物密度的函数。

略去其它因素的影响, 如燃料消耗等, 得到了如下的费用:

表 2

11	13	11	12	18	18	10	10	10	12	14	16	11	13	14	14	16
8	9	6	7	9	8	6	9	10	13	17	21	14	12	15	16	25
5	5	5	6	6	7	10	14	15	11	12	17	20	17	20	17	22
7	10	10	9	9	11	17	21	23	10	14	17	23	28	28	28	27
5	10	19	18	11	12	15	24	23	17	17	19	21	24	30	26	27
5	9	13	23	22	17	15	18	18	15	15	15	17	21	26	24	20
5	7	10	13	19	21	12	12	12	14	14	14	13	15	16	12	14
5	6	8	10	12	15	10	10	11	18	18	10	9	9	13	11	7
5	5	7	7	7	7	9	14	18	18	21	13	9	5	7	7	5
5	5	5	5	7	9	11	12	19	25	21	13	10	6	5	5	7
5	3	4	5	6	10	13	17	18	22	24	14	10	6	5	5	9
2	2	4	5	7	10	17	15	16	13	13	14	10	5	4	5	9
2	5	6	7	8	11	11	8	16	18	8	11	10	4	3	4	5
3	7	9	11	10	10	7	6	12	10	6	6	2	3	5	6	5
0	3	6	11	10	10	6	2	5	7	3	7	2	14	15	7	6
0	1	1	4	7	10	4	1	0	1	2	1	6	7	13	19	11
0	0	1	1	5	6	4	1	1	2	4	4	10	11	12	23	17

其中的数值表示机器人在相应地形单元中的移动费用, 机器人的一步转移只发生在相邻的地形单元间, 见表 2 中的箭头所示。

我们在 SPARCstation 10 上的 Solaris 2.3 环境下使用 SPARCcompiler C++ 实现了这个求解所有点间最优路径的计算机程序。表 2 以粗斜方式给出了最优路径集中的一条从左上角至右下角的路径。图 1 给出了其计算时间 (s) 和存储空间(千字节)与地形单元数目间的变化曲线, 其中带* 曲线为存储空间变化规律。

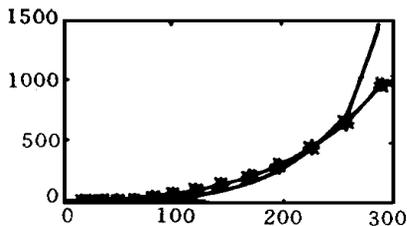


图 1

由于该方法的时间复杂性为 $o(N^3N_e)$, 且求解(存储)了所有单元间的最优路径, 因此该方法在移动机器人任务规划的高层次上应用比较合适。

4 结束语

在广义胞映射理论中, 定义转移概率矩阵, 从而获得自治非线性动力学系统的长期性态。基于广义胞映射的转移概率矩阵的概念, 我们定义了机器人路径规划中的转移费用矩阵, 通过转移费用矩阵上的二元运算, 将点与点之间的最优路径的生成, 转化为矩阵的运算, 通过有限次矩阵运算便可获得地形环境中所有点间的最优路径, 达到了在预处理阶段构造最优路径集的目的。

本文所叙述的方法具有如下的特点:

- (1) 通过有限次矩阵运算, 可求解地形环境中所有点间的最优路径。
- (2) 所给出的求解最优路径集的算法具有多项式时间复杂性。
- (3) 由于存储了所有点间的最优路径, 该算法对存储空间的要求较高, 见图 1, 因此运用在分层规划的较高层次上比较合适。

参考文献

- 1 沈林成. 数字地形模型与机器人路径规划: [博士论文]. 长沙: 国防科技大学自控系, 1994
- 2 Hsu S. Cell-to-Cell Mapping. New York: Spinger-Verlag, 1987, 210
- 3 Millar J. An AI-Based Framework for Planning Air Launched Cruise Missile Missions. AD-A154466, 1986
- 4 Malin A. Automatic Routing Module. N88-17251

(责任编辑 张静)