

登月舱制动段最优机动中的状态跟踪*

薛正升 胡小平

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

陈新海

(西北工业大学航天学院 西安 710072)

摘要 本文根据登月舱的运动方程,在固定推力条件下,给出最优推力方向。在最优推力方向上对摄动方程加入自适应调节控制,得到状态跟踪的稳定性,使受控系统的输出跟踪状态精度得到保证。

关键词 登月舱, 最优控制, 自适应控制, 状态跟踪

分类号 V 249. 122

Optimal Power-driven State Tracing of Module in Brake

Xue Zhengsheng Hu XiaoPing

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Chen XinHai

(College of Astronautics, Northwestem Polytechnical University, Xian, 710072)

Abstract In this paper according to the equation of movement of the lunar module, under the condition of fixed thrust, the optimal direction of thrust is obtained. Along such a dirction, a self-adapting adjustment control is given to the perturbation equation to guarantee the stability of state-tracing, so as to assure the high precision of the output tracing state for the system under control.

Key words lunar module, optimal control, self-adapting control state-tracing

早在 60 年代末至 70 年代初,载人登月软着陆就已经获得成功。当时从停泊轨道向月球表面进行燃料最优动力下降时,对预期轨道加入人为判断柔性度,例如飞行阶段轨

* 1996 年 9 月 4 日收稿

道特征：飞船高度、下降速度、飞船距离目的地的水平距离和飞行速度等因素都要考虑，因为这些因素的某些或全部都可能与燃料最小消耗相抵触，这在当时只有通过人为折衷方案来实现，不可避免地根据状态约束增加了机动，未能充分实现最小燃料下降。

本文应用自适应跟踪控制方法，探讨了在燃料性能指标泛函为最小的推力方向上，跟踪状态稳定性问题。在这个飞行轨道的大部分时间里都使用了最优机动推力，在开关函数作用期间对自适应增益修正进行了探讨，给出跟踪状态收敛性证明。最后通过仿真得出有关曲线。

1 运动方程的建立

登月舱在最少燃料下降机动中，其运动将在与月球表面刚性连接的相对坐标系 $O-xyz$ 中讨论。相对坐标系的原点设置在标准轨道上， x 轴沿登月舱的运动向前，与其下降轨道相切； y 轴沿当地的垂线； z 轴与 x 轴一样，在水平面之中。忽略月球的昼夜旋转，使下降轨道附近的引力线性化，可以得到相对运动方程^[1]

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x + U_x \quad \ddot{y} = \frac{2\mu}{r^3}y - \frac{\mu}{r^2} + U_y \quad \ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}z + U_z \quad (1)$$

式中 r 为登月舱在月心相对坐标系中的轨道半径； μ 为月球的引力参数； $U = \frac{F(t)}{m(t)}$ 为推力加速度， $F(t)$ 为推力， $m(t)$ 为登月舱质量。

将方程 (1) 改写为状态方程，有：

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \dot{x}_4 = \dot{x}, \dot{y}_5 = \dot{y}, \dot{z}_6 = \dot{z}, x_7 = m$$

则系统方程为：

$$\dot{x}_4 = x_4, \dot{y}_5 = x_5, \dot{z}_6 = x_6, \dot{x}_4 = -\frac{\mu}{r^3}x_1 + U_x, \dot{x}_5 = \frac{2\mu}{r^3}x_2 + U_y, \dot{x}_6 = -\frac{\mu}{r^3}x_3 + U_z \quad (2)$$

2 状态最优跟踪

2.1 运动状态的分析

由于选择最优轨道的原则是燃料消耗最少，那么性能指标函数可以用速度增量来表示：

$$J = \min_0^t \int_0^t F(t) dt \quad (3)$$

此时根据燃料最少性能指标，应用极大值原理求出最优控制的哈密尔顿函数，由此函数可以得到最优推力方向和开关函数，在固定推力情况下实现最少燃料飞行。

设 $\lambda_r^T = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$ ， $\lambda_v^T = [\lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6]^T$ 及 λ_7 各为 r 、 v 和 m 的共轭矢量，则哈密尔顿函数为：

$$H = F + \lambda_r^T V + \lambda_4 \left[-\frac{\mu}{r^3}x_1 \right] + \lambda_5 \left[\frac{2\mu}{r^3}x_2 \right] + \lambda_6 \left[-\frac{\mu}{r^3}x_3 \right] + \lambda_v^T x_7^{-1} F - \lambda_7 \frac{F}{k} \quad (4)$$

在方程中可以看到， F 与 λ_v 同向时， H 取极大。

登月舱在运动空间的最优推力方向上，由于存在摄动等因素的作用，不可避免地产生误差，则登月舱在实际运动中要求对运动状态，即位置和速度进行跟踪。在跟踪中一

方面要保证状态误差在一定的范围内,另一方面要保证状态调整具有收敛性和鲁棒性。下面本文针对最优跟踪的两方面要求设计隐式自适应控制律,并给出证明。

设在最优推力方向上的位置误差为 w , 位置跟踪精度为 $\epsilon \geq 0$, 速度跟踪精度为 $\epsilon \geq 0$, 实际状态为 X_d , 即

$$w(t) \leq \epsilon \quad \dot{w}(t) \leq \epsilon \quad \forall t \leq T \quad T \text{ 为推力作用时间} \quad (5)$$

其中 $w(t) = X - X_d$ $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ $X_d = [x_{d1} \ x_{d2} \ x_{d3}]$

在最优推力方向上, 时间—燃料最优控制的摄动双积分控制系统为^[3]:

$$\dot{X} = g(X, \dot{X}, t) + au \quad (6)$$

u 为开关控制函数, a 为常数 (一般与执行机构的功率有关), $g(X, \dot{X}, t)$ 为摄动加速度。

根据文献 [3], 有 $g(X, \dot{X}, t) / a < \alpha < \frac{1}{2}$, 如果摄动加速度 $g(X, \dot{X}, t) / a$ 的上确界小于 $1/2$, 消振常数 α 是存在的。其摄动量主要为月球引力和登月舱运动的质量变化, 则 $X_1 = \frac{X}{a}$, $X_2 = \frac{\dot{X}}{a}$, $f(X_1, X_2, t) = \frac{g(X, \dot{X}, t)}{a}$ 。

根据文献 [3], 在考虑摄动项时, 在开关函数中加入摄动补偿 \bar{s} , 其开关函数为:

$$\bar{s}_1 = x_1 + \frac{4 + (\rho + \epsilon)}{2(\rho + \epsilon)} x_2 \quad x_2 \quad (\text{关函数}) \quad (7)$$

$$\bar{s}_2 = x_1 + \frac{1}{2(1 - \alpha)} x_2 \quad x_2 \quad (\text{开函数})$$

该文献证明了系统是收敛于原点的, 而且这种收敛是全局的, 飞船达到了软着陆的目的, 而且克服了系统的摄动引起的高频颤振。同时也说明如果系统函数 f 含有不确定性, 只要摄动加速度条件不被破坏, 控制律仍可使系统从任意点收敛于原点。

根据参考文献 [1], 在考虑登月舱运动中质量变化的影响和月球引力的作用时, 应用方程 (1) 进行计算时伴有很困难的计算特性, 可以认为登月舱的运动是共面运动。考虑月球引力和登月舱的质量变化, 其摄动为:

$$\begin{aligned} x \text{ 向: } f_x(X_1, X_2, t) &= \frac{g_x(X_1, X_2, t)}{a} = - \frac{\frac{\mu}{r^3} x \left(m_0 - \frac{F}{k} t \right)}{F} \\ y \text{ 向: } f_y(X_1, X_2, t) &= \frac{g_y(X_1, X_2, t)}{a} = \frac{\left[-\frac{\mu}{r} + \frac{2\mu}{r^3} y \right] \left(m_0 - \frac{F}{k} t \right)}{F} \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 建立自适应控制

从上面分析可以看出, 真正支配登月舱在最优推力方向上的运动不仅仅是推力作用, 而且有月球引力和登月舱质量变化的摄动作用。因此在方程 (6) 中, 在状态跟踪中对登月舱的实际状态给予补偿, 以保证登月舱在最优方向上保持定向。根据“阿波罗”登月舱运动的经验^[4], 在实际运动中利用多处月球信标 (例如马斯基林火山、Ptolemaeus 山等), 通过制导雷达, 沿登月舱飞行路线摄取景物图像, 并将实时图像与预储图像进行比较, 得到固定程序与实际运动的误差。根据文献 [5], 通过卡尔曼滤波可以对制导系统进行输出校正, 得到 w 与 \dot{w} 。其机动补偿推力方程设为:

$$au = \ddot{X}_d - K_v \dot{w} - K_p w \quad (9)$$

其中 K_v 和 K_p 为速度和位置的补偿增益, 附加补偿增益后误差项为加速度阶。在自适应控制中, 可以将补偿增益划分为增益的固定部分 c_0 和自适应增益部分 c , 因此有:

$$au = \ddot{X}_d - (c + c_0) \dot{w} - cc_0 w \quad (10)$$

代入方程 (6) 中, 有

$$\ddot{X} - \ddot{X}_d = g(X, \dot{X}, t) - (c + c_0) \dot{w} - cc_0 w \quad (11)$$

考虑到摄动 $g(X, \dot{X}, t)$ 在最优推力方向上实际是一种梯度摄动, 在一定的运动区间内简化。考虑它是实际摄动 $g(X, \dot{X}, t)$ 与已知摄动 $g_0(X, \dot{X}, t)$ 之差。则上式变为:

$$\ddot{w} = g(X, \dot{X}, t) - g_0(X, \dot{X}, t) - (c + c_0) \dot{w} - cc_0 w$$

整理得

$$\dot{w} + c_0 w = g(X, \dot{X}, t) - g_0(X, \dot{X}, t) - c(\dot{w} + c_0 w)$$

设 $b = \dot{w} + c_0 w$, 则有:

$$\dot{b} = -cb + g(X, \dot{X}, t) - g_0(X, \dot{X}, t) \quad (12)$$

这就是自适应控制律的方程。

由于在最优机动的恒定推力区间内, 摄动不发生突变, 则摄动变化量应保持在一定范围内, 则有 $g - g_0 \leq \alpha_1 b$, 而补偿摄动的自适应增益也应有调整下限 $C_{\min} \geq \alpha_2$,

在最优推力方向上的最大状态跟踪补偿精度为 $\alpha_{\max} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 。在分析最优推力方向上的状态

跟踪补偿精度 α 时, 可以发现它是不定精度, 对于不定精度只能用估计值予以计算。设 $\hat{\alpha}$ 是 α 估计值, 根据 $\hat{\alpha}$ 设定自适应增益 c 的规定。下面讨论状态跟踪自适应控制的 b 相轨迹终结有界性, 以证明自适应状态跟踪的鲁棒性和收敛性。

对于自适应状态跟踪精度的鲁棒性证明如下, 设

$$\hat{\alpha} = \beta b^2, \text{ 当开关函数 } s(t) > 0, \text{ 为推力作用段时, } b \geq \delta$$

$$\hat{\alpha} = 0, \text{ 当开关函数 } s(t) < 0, \text{ 为推力惯性段时, } b \leq \delta \quad (13)$$

$$c = \hat{\alpha} \frac{b}{\delta}$$

其中 β 是加权值, $\beta > 0$; δ 为自适应控制律 b 的相轨迹原点邻域, $\delta > 0$ 。对于任意给定的 $\delta > 0$, 若 δ 的选取使 $\delta < \delta$, 则存在有限时间 t , 使 $b < \delta, \forall t \geq t$ 。

取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2\alpha} b^T b + \frac{1}{2\beta} (\alpha - \hat{\alpha})^2$$

根据最优推力方向上的自适应控制律公式 (12), 将上式微分得:

$$\dot{V} = -\frac{c}{\alpha} b^T b + \frac{1}{\alpha} b^T (g - g_0) - \frac{1}{\beta} (\alpha - \hat{\alpha}) \hat{\alpha}$$

由于

$$b^T b \geq c b^2 \geq \alpha b^2$$

$$b^T (g - g_0) \leq \alpha b^2$$

应用证明前的假设条件 (12) 式, 有在 $b \geq \delta$ 时:

$$\dot{V} < -c b^2 + \alpha b^2 - (\alpha - \hat{\alpha}) b^2$$

$$\langle -c \mathbf{b}^2 + \hat{\alpha} \mathbf{b}^2 = -\hat{\alpha} \mathbf{b}^2 \left[\frac{\mathbf{b}}{\delta} - 1 \right] \rangle < 0 \quad (14)$$

这就证明了在最优推力方向上附加自适应控制律，能够保证在未知摄动的扰动下机动推力补偿后，状态跟踪具有鲁棒性，它使整个控制系统具有稳定性。因为自适应控制律 \mathbf{b} 的相轨迹渐近趋向于原点的邻域， \mathbf{b} 终结是有界控制的。

在以上基础上，进一步证明状态跟踪误差 $\hat{\mathbf{w}}(t)$ 和 $\mathbf{w}(t)$ 的收敛性，以确定在方程 (5) 中的假设是成立的，同时确认在最优方向上所附加的自适应控制律具有使跟踪误差收敛的能力。在渐近稳定系统中，已经推导出自适应控制律 \mathbf{b} 的相轨迹渐近趋向于原点的邻域， \mathbf{b} 是终结有界的，由于在稳定系统中的自适应具有固定增益 c_0 ，可以令

$$\mathbf{b} < c_0 \epsilon \quad (15)$$

由于 $\mathbf{b} = \mathbf{w} + c_0 \mathbf{w}$ ，则有：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \hat{\mathbf{w}} + c_0 \mathbf{w} < \hat{\mathbf{w}} + c_0 \mathbf{w} < c_0 \epsilon \quad \text{解之, 有} \\ \mathbf{w} &< e^{-c_0 t} + \epsilon \end{aligned} \quad (16)$$

在登月舱最优推力方向上，最优机动推力的区间作用时间可以认为较大，因此有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-c_0 t} = 0$$

故有

$$\mathbf{w} < \epsilon \quad (17)$$

进而

$$\hat{\mathbf{w}} \leq \mathbf{b} + c_0 \mathbf{w} < 2c_0 \epsilon < \epsilon \quad (18)$$

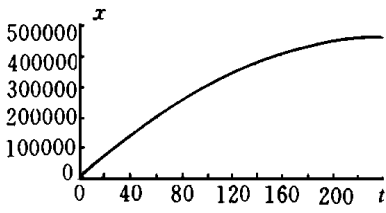
在以上推导中证明了在推力方向上附加自适应控制律能够使状态跟踪误差具有收敛性。

由此可见，如果在计算出最优推力以后，适当地给出自适应控制律，能够使登月舱在最优推力方向上调整未知扰动的干扰，并使状态跟踪具有稳定性和鲁棒性。

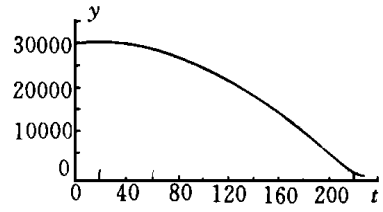
3 仿真计算与结论

令登月舱的初始条件为： $F = 45000\text{N}$ ， $m_0 = 5000\text{kg}$ ， $k = 3000\text{m/s}$ ， $g = 1.96\text{m/s}^2$ ， $y(t_0) = 31070\text{m}$ ， $v_x(t_0) = -3454.98\text{m/s}$ ， $v_y(t_0) = 0$ ， $x(t_0) = 0$ 。终端条件为： $y(t_f) = 1000\text{m}$ ， $v_y(t_f) = 0$ ， $v_x(t_f) = -46.6\text{m/s}$ 。设期望的位置和速度精度分别为 $\epsilon = 10\text{m}$ ， $\epsilon_v = 5\text{m/s}$ ， $c_0 = 5$ ， $\delta = 4.8$ ， $\beta = 1$ 。仿真结果如图 1 所示，其中 x_1 、 x_2 、 \dot{x}_1 、 \dot{x}_2 的跟踪轨迹分别为图 (a) ~ (d)， $\mathbf{w}(t)$ 、 $\hat{\mathbf{w}}(t)$ 的收敛情况如图 (e)、(f)。从仿真结果中，可以看出速度和位置在 76s 时，参数摄动经自适应调节可收敛，能保证运动在时间历程的精度。

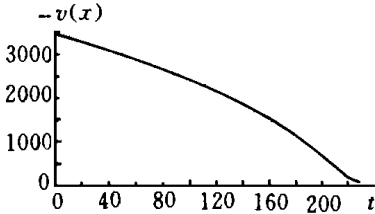
本文在理论上阐述了在最优推力方向上赋以自适应调节控制律，能够使状态跟踪调节趋于稳定，通过证明表明这种方法在状态跟踪中是可行的，克服了在最优方向上未知摄动造成的状态变化。通过自适应的稳定性和收敛性，保证了登月舱下降中状态能够基本上沿最优方向进行，具有一定的应用价值。



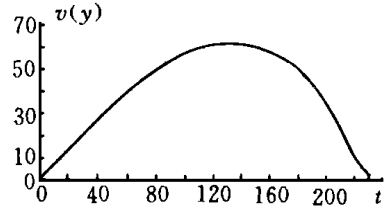
(a)



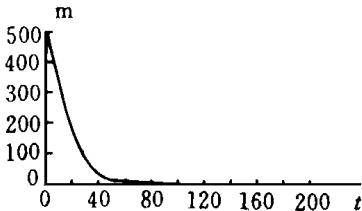
(b)



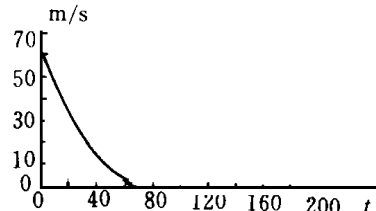
(c)



(d)



(e)



(f)

图 1 融合自适应控制的仿真结果

参考文献

- 1 阿波罗登月计划. 阿波罗登月计划. 阿波罗登月计划. 阿波罗登月计划. 阿波罗登月计划, 1965
- 2 林来兴. 空间交会对接技术. 北京: 国防工业出版社. 1995: 54~59
- 3 荆武兴等. 摄动双积分系统的时间-燃料次优反馈控制. 控制理论与应用, 1994 (3): 264~269
- 4 Cheatham D C, Bennett F V. Apollo Lunar Module Landing Strategy, Apollo Lunar Landing Mission Symposium, June 25-27, NASA TM X-58006 1996: 175~240
- 5 齐春棠. 卡尔曼滤波在未制导中的应用. 航天控制. 1988 (4)

(责任编辑 张 静)