

## 一种小波变换域中最优门限的取法<sup>\*</sup>

李弼程 沙基昌 郑勇 周铁强

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

**摘要** 在信号小波变换编码中,一般对高频小波系数  $x$  先作阈值处理,即对给定的门限  $T > 0$ ;若  $x > T$ ,则令  $x = 0$ 。在本文中,从理论上给出了一种最优门限  $T_{opt}, T_{opt}$  使得重构误差信号的平均能量达到最小。

**关键词** 小波分析, Mallat 算法, 门限, 大数定律

**分类号** TN91.21

## An Optimum Threshold in Wavelet Transform Domain

Li Bicheng Sha Jichang Zheng Yong Zhou Tieqiang

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In general, a threshold  $T$  is used to determin whether high-frequency wavelet coefficients to be insignificant in wavelet transforme coding of singals. That is, let  $x$  be a high-frequency wavelet coefficient, if  $x > T$ , then  $x$  is insignificant and set  $x = 0$ . In this paper, an optimum threshold  $T_{opt}$  is given theoretically and  $T_{opt}$  minmizes the average energy of the distortion between the original signal and the reconstructed signal.

**Key Words** Multiresolution Analysis, Mallat Algorithm, Threshold, Large Number Law

在信号小波变换编码中,为了提高编码效率与重构信号的质量,一般对高频小波系数先作阈值处理<sup>[1][2][5]</sup>。对于门限  $T$ ,如果小波系数的绝对值不大于  $T$ ,则置之为 0。在具体的量化编码中除了作阈值处理外,对绝对值大于  $T$  的高频小波系数还要作某种量化  $Q$ ,从而也带来量化误差  $\epsilon$ ,这种误差的能量记为  $\sigma_\epsilon^2$ 。 $\sigma_\epsilon^2$  是由量化方式  $Q$  和小波系数的能量确定的。由于高频小波系数大部分集中在零附近,对零附近的小波系数直接进行量化  $Q$  可能比对它们作阈值处理带来更大的重构误差,当然与作阈值处理的门限大小有关。因此,一

\* 国防预研基金与国防科大试验技术基金项目资助

1996 年 11 月 12 日收稿

般对高频小波系数先作阈值处理,且存在最优门限问题。一般情况下,门限  $T$  是人为给定的。本文根据小波系数的统计特性,从理论上给出了某种意义下的最优门限  $T_{opt}$ 。在量化方式  $Q$  确定的条件下,也就是  $\sigma_\epsilon^2$  确定的条件下,  $T_{opt} = \sigma_\epsilon$  使得重构误差信号的平均能量达到最小。如(21)与(26)式所示,选取适当的门限作阈值处理可以提高重构图像的质量,文献[1]已给出了实验证明,限于篇幅,这里只给出理论推导。

## 1 小波分析

小波分析作为一种空间域和时间域局部化分析方法<sup>[3][4]</sup>,被认为是傅里叶分析发展史上里程碑式的进展,成为众多科学共同关注的焦点。在多分辨分析中,S. Mallat 引入了两个函数:尺度函数  $\phi(x)$  与小波函数  $\psi(x)$ 。尺度函数  $\phi(x)$  的伸缩与平移系  $\phi_{j,n}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx - n)$  对固定的  $j$  值是相互正交的,其中  $j, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  空间的闭子空间  $V_j$  的正交基,同样对固定的  $j$  值,  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  也构成  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补  $W_j$  的正交基,即

$$W_j = \text{span}\left\{\psi_{j,n}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - n), n \in \mathbb{Z}\right\}$$

并且  $\{\psi_{j,n}(x)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  空间的一组正交基,称之为正交小波基。尺度函数  $\phi(x)$  与小波函数  $\psi(x)$  满足下面的关系:

$$\phi(x) = \sum_n h(n) \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x - n) \quad (1)$$

$$\psi(x) = \sum_n g(n) \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x - n) \quad (2)$$

其中  $g(n) = (-1)^n h(1-n)$ , 令  $H(\omega) = \sum_n h(n) e^{-in\omega}$ ,  $H(\omega)$  满足:

$$H(\omega)^2 + H(\omega + \pi)^2 = 2 \quad (3)$$

$$H(0) = \sqrt{2} \quad (4)$$

$\{h(n)\}$  可看成是一组低通滤波系数,  $\{g(n)\}$  可看成是一组高通滤波系数,它们满足下面的关系:

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g(n) = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum_n h(n-2k)h(n-2l) = \delta_{kl}, \quad \sum_n g(n-2k)g(n-2l) = \delta_{kl} \quad (5.2)$$

$$\sum_n h(n-2k)g(n-2l) = 0, \quad \sum_n [h(k-2n)h(l-2n) + g(k-2n)g(l-2n)] = \delta_{kl} \quad (5.3)$$

根据著名的 Mallat 算法,给定数据的小波分解和合成过程可由两带滤波器的级联滤波而产生。设  $\{C_k^m\}$  为输入序列,  $\{C_k^i\}$  为经  $i$  次低通滤波而得到的输出,  $\{d_k^i\}$  为经  $i$  次高通滤波而得到的输出,信号分解和合成过程如图 1 所示。

对于二维信源,需要使用二维滤波器进行处理。考虑到小波函数的可分离性,二维滤波器可由一维滤波器复合而成。用  $L$  表示低通滤波器,用  $H$  表示高通滤波器,则滤波器  $LL$ 、 $LH$ 、 $HL$  和  $HH$  构成四个具有不同频率特性和方向特性的滤波器。 $LL$  用于检

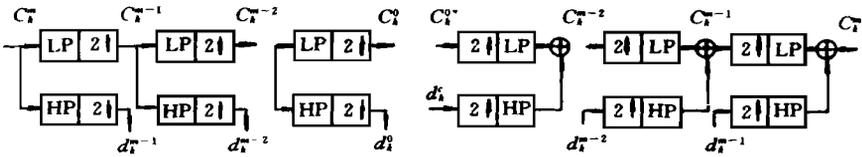


图 1 信号分解与重构过程

测图像中的低频分量；LH 用于检测水平方向的边缘、细节分量；HL 用于检测垂直方向的边缘、细节分量；HH 用于检测主对角线与副对角线方向的分量。图 2 表示图像的小波分解（分解三层）。

我们只考虑分解一次，多次分解是一次一次叠加起来的。在变换编码中，变换的目的是去相关的。事实上，小波变换系数可以看成统计上独立的<sup>[5]</sup>。高频小波系数可以近似均值为 0 的高斯分布、拉普拉斯分布或一般高斯分布。设高频小波系数的密度函数为  $p(x)$ ，其均值为 0，方差为  $\sigma^2$ （实际应用中由高频小波系数估计出来）。一般高斯分布的密度函数为

$$P_X(x) = a e^{-bx^\alpha} \quad (6)$$

$$\text{其中 } a = \frac{b\alpha}{2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \quad b = \frac{1}{\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \quad (7)$$

$$\text{这里 } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\beta-1} dx, \sigma$$

为一般高斯分布的标准方差,  $\alpha > 0$ 。

如果取  $\alpha = 1$ , (6) 为拉普拉斯密度函数；如果取  $\alpha = 2$ , (6) 为高斯密度函数。此外,  $p(x)$  是关于  $x = 0$  为对称轴的对称函数。

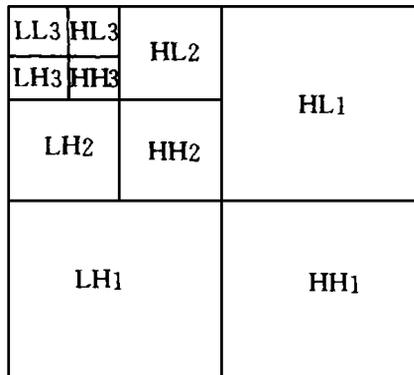


图 2 表示图像的小波分解

## 2 最优门限

### 2.1 一维情形

对于原始信号  $\{s(n)\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , 令  $c_n^1 = s(n)$ , 根据 Mallat 分解算法, 低通滤波输出:

$$c_n^0 = \sum_k c_k^1 h(k - 2n) \quad (8)$$

高通滤波输出为:

$$d_n^0 = \sum_k c_k^1 g(k - 2n) \quad (9)$$

其中,  $n = 0, 1, \dots, \left[ \frac{N}{2} \right] - 1$ 。

根据 Mallat 重构算法,

$$c_n^1 = \sum_k \left[ d_k^0 h(n-2k) + e_k^0 g(n-2k) \right] \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (10)$$

对高频系数  $d_n^0$   $\left[ n = 0, 1, \dots, \left[ \frac{N}{2} \right] - 1 \right]$  的量化, 一般分两步: 第一步, 作阈值处理, 对于门限  $T$ , 如果  $d_n^0 > T$ , 则令  $d_n^0 = 0$ 。第二步, 对绝对值大于  $T$  的小波系数  $d_n^0$  作某种量化  $Q$ , 带来的误差信号为  $\epsilon_n^0$ 。令

$$e_n^0 = d_n^0 - d_n^0 I[d_n^0 \leq T] - \epsilon_n^0 I[d_n^0 > T] \quad (11)$$

其中  $n = 0, 1, \dots, \left[ \frac{N}{2} \right] - 1$ 。  $e_n^0$  为高频系数的量化输出,  $\epsilon_n^0 (n = 0, 1, \dots)$  i. i. d,  $E\epsilon_n^0 = 0$ ,  $E(\epsilon_n^0)^2 = \sigma_{\epsilon_n^0}^2$ , 且  $\{\epsilon_n^0\}$  与  $\{d_n^0\}$  独立。  $I_x$  为特征函数。

设对低频系数  $c_n^0$  的量化方式为  $W$ , 误差为  $\omega_n^0$ ,  $\{\omega_n^0\}$  独立同分布, 均值为 0, 方差为  $\sigma_{\omega_n^0}^2$ ,  $\{\omega_n^0\}$ 、 $\{\epsilon_n^0\}$  与  $\{d_n^0\}$  相互独立。低频系数  $c_n^0$  的量化输出为:

$$b_n^0 = c_n^0 - \omega_n^0 \quad (12)$$

$$\text{则重构信号为} \quad f_n^1 = \sum_k \left[ b_k^0 h(n-2k) + e_k^0 g(n-2k) \right] \quad (13)$$

重构误差信号为

$$w_n^1 = c_n^1 - f_n^1 = \sum_k \left\{ d_k^0 I[d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[d_k^0 > T] \right\} g(n-2k) + \sum_k \omega_k^0 h(n-2k) \quad (14)$$

由于  $d_k^0$  的密度函数  $p(x)$  是关于  $x = 0$  为对称轴的对称函数, 故

$$E\left\{ d_k^0 I[d_k^0 \leq T] \right\} = \int_{-T}^T x p(x) dx = 0$$

$$\text{从而} \quad E\left\{ w_n^1 \right\} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_k \sum_l g(n-2k) g(n-2l) \left[ d_k^0 I[d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[d_k^0 > T] \right] \left[ d_l^0 I[d_l^0 \leq T] + \epsilon_l^0 I[d_l^0 > T] \right] \\ &+ 2 \sum_k \sum_l g(n-2k) h(n-2l) \left[ d_k^0 I[d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[d_k^0 > T] \right] \omega_l^0 \\ &+ \sum_k \sum_l h(n-2k) h(n-2l) \omega_k^0 \omega_l^0 \end{aligned} \quad (16)$$

当  $N$  充分大时, 重构误差信号的平均能量为

$$\begin{aligned} D(T) &= \frac{\sum_n (w_n^1)^2}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \sum_l \sum_n g(n-2k) g(n-2l) \left[ d_k^0 I[d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[d_k^0 > T] \right] \\ &\quad \left[ d_l^0 I[d_l^0 \leq T] + \epsilon_l^0 I[d_l^0 > T] \right] \\ &\quad + \frac{2}{N} \sum_k \sum_l \sum_n g(n-2k) h(n-2l) \left[ d_k^0 I[d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[d_k^0 > T] \right] \omega_l^0 \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_k \sum_l \sum_n h(n-2k) h(n-2l) \omega_k^0 \omega_l^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} \left( d_k^0 I[ d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[ d_k^0 > T] \right) \left( d_k^0 I[ d_k^0 \leq T] + \epsilon_k^0 I[ d_k^0 > T] \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} \left( \omega_k^0 \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} E \left( d_0^0 I[ d_0^0 \leq T] + \epsilon_0^0 I[ d_0^0 > T] \right)^2 + \frac{1}{2} E \left( \omega^0 \right)^2 \quad (N \rightarrow \infty) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T}^T (x^2 - \sigma_\epsilon^2) p(x) dx + \frac{1}{2} (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\omega^2) \quad (17)
\end{aligned}$$

这里，我们利用了大数定律<sup>[6][7]</sup>。

$$\text{由(17) 知: } T_{opt} = \sigma_\epsilon \quad (18)$$

$$D(T_{opt}) = \min_T D(T) = \frac{1}{2} \int_{-\sigma_\epsilon}^{\sigma_\epsilon} (x^2 - \sigma_\epsilon^2) p(x) dx + \frac{1}{2} (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\omega^2) \quad (19)$$

其中  $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\omega^2$  由具体的量化方式  $Q, W$  以及相应小波系数的能量确定的。例如，如果  $Q$  为  $R$  比特率的均匀量化器<sup>[8]</sup>，则  $\sigma_\epsilon^2 = \epsilon^* \sigma^2 2^{-2R}$ ，其中  $\epsilon^*$  为比例因子， $R$  为量化比特率， $\sigma^2$  为高频系数的能量。一般的量化器其量化误差能量都具有这种负指数形式<sup>[9]</sup>。

如果  $T = 0$ ，即不作阈值处理，则重构误差信号的平均能量为

$$D(0) = \frac{1}{2} (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\omega^2) \quad (20)$$

$$\text{从而} \quad D(0) - D(T_{opt}) = \frac{1}{2} \int_{-\sigma_\epsilon}^{\sigma_\epsilon} (\sigma_\epsilon^2 - x^2) p(x) dx > 0 \quad (21)$$

(21) 式表明，取适当的门限作阈值处理可以提高重构信号的质量。如果分解  $N(N-1)$  层，则根据各层高频量化误差的能量  $\sigma_\epsilon^2$ ，由(18) 式分别给出各层的门限。

## 2.2 二维情形

对于二维情形，此时要考虑三个高频子图 LH、HH、HL，其均值都为 0，方差分别为  $\sigma_{LH}^2, \sigma_{HH}^2, \sigma_{HL}^2$ ；相应的密度函数为  $p_{LH}(x), p_{HH}(x), p_{HL}(x)$ ，都为一般高斯分布的密度函数；相应的门限为  $T_{LH}, T_{HH}, T_{HL}$ 。相应于一维情形的  $\sigma_\epsilon^2$  有三个： $\sigma_{\epsilon LH}^2, \sigma_{\epsilon HH}^2, \sigma_{\epsilon HL}^2$ ； $\sigma_\omega^2$  的意义同一维情形。类似于一维情形，重构误差信号的平均能量为：

$$\begin{aligned}
&D(T_{LH}, T_{HH}, T_{HL}) \\
&= \frac{1}{4} (\sigma_{\epsilon LH}^2 + \sigma_{\epsilon HH}^2 + \sigma_{\epsilon HL}^2 + \sigma_\omega^2) + \frac{1}{4} \int_{-T_{LH}}^{T_{LH}} (x^2 - \sigma_{\epsilon LH}^2) p_{LH}(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{-T_{HH}}^{T_{HH}} (x^2 - \sigma_{\epsilon HH}^2) p_{HH}(x) dx + \frac{1}{4} \int_{-T_{HL}}^{T_{HL}} (x^2 - \sigma_{\epsilon HL}^2) p_{HL}(x) dx \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\text{由(22) 知: } T_{LH opt} = \sigma_{\epsilon LH}, T_{HH opt} = \sigma_{\epsilon HH}, T_{HL opt} = \sigma_{\epsilon HL} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
&D(T_{LH opt}, T_{HH opt}, T_{HL opt}) \\
&= \min_{T_{LH}, T_{HH}, T_{HL}} D(T_{LH}, T_{HH}, T_{HL}) \\
&= \frac{1}{4} (\sigma_{\epsilon LH}^2 + \sigma_{\epsilon HH}^2 + \sigma_{\epsilon HL}^2 + \sigma_\omega^2) + \frac{1}{4} \int_{-\sigma_{\epsilon LH}}^{\sigma_{\epsilon LH}} (x^2 - \sigma_{\epsilon LH}^2) p_{LH}(x) dx
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{-\sigma_{eHH}}^{\sigma_{eHH}} (x^2 - \sigma_{eHH}^2) p_{HH}(x) dx + \frac{1}{4} \int_{-\sigma_{eHL}}^{\sigma_{eHL}} (x^2 - \sigma_{eHL}^2) p_{HL}(x) dx \quad (24)$$

$$\text{类似于一维情形, } D(0, 0, 0) = \frac{1}{4} \left[ \sigma_{eLH}^2 + \sigma_{eHH}^2 + \sigma_{eHL}^2 + \sigma_{e0}^2 \right] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & D(0, 0, 0) - D(T^{LHopt}, T^{HHopt}, T^{HLopt}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\sigma_{eLH}}^{\sigma_{eLH}} (\sigma_{eLH}^2 - x^2) p_{LH}(x) dx + \frac{1}{4} \int_{-\sigma_{eHH}}^{\sigma_{eHH}} (\sigma_{eHH}^2 - x^2) p_{HH}(x) dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-\sigma_{eHL}}^{\sigma_{eHL}} (\sigma_{eHL}^2 - x^2) p_{HL}(x) dx > 0 \end{aligned} \quad (26)$$

(26) 式表明, 取适当的门限作阈值处理可以提高重构图像的质量。如果分解  $N(N-1)$  层, 则根据各层高频量化误差的能量  $\sigma_{eLH}^2$ 、 $\sigma_{eHH}^2$ 、 $\sigma_{eHL}^2$ , 由(23) 式给出各层的最优门限。

### 3 结 论

本文从理论上给出了在信号小波变换编码中关于高频小波系数的一种最优门限的取法, 表明了在小波变换编码中, 适当地选取门限对高频小波系数作阈值处理, 可以提高重构信号的质量。

### 参 考 文 献

- 1 Michel Barlaud, Patrick Sole. Pyramidal Lattice Vector Quantization for Multiscale Image Coding. IEEE Trans on Image Processing, 1994, 3 (4): 367 ~ 380
- 2 李弼程. 多分辨率图扩充块预测编码. 见: 全国第五届多媒体技术学术会议论文集, 华中理工大学, 1996
- 3 Daubechies I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Commun Pure Appl Math, 1988, 41: 909 ~ 996
- 4 Mallat S. A Theory for Multiresolution Singal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell 1989, 11 (7): 674 ~ 693
- 5 马维祯. 利用子波变换的图象压缩编码技术. 信号处理, 1995, 11 (3): 129 ~ 138
- 6 Yuan Shih Chow and Henry Teicher. Probability Theory. Springer-Verlag World Publishing Corporation, 1988
- 7 中山大学数学力学系. 概率论及数理统计 (上, 下册). 高等教育出版社, 1986
- 8 Allen Gersho and Robert Gray. Vector Quantization and Signal Compression, by Kluwer Academic Publishers, 1992
- 9 Jorge L. Salinas and Richard L. Baker. Laplacian Pyramid Encoding: Optimum Rate and Distortion Allocation. in pro ICASSP- 1989: 1957 ~ 1960

(责任编辑 潘生)