

# 基于神经元的动态系统模糊关系模型及其学习算法\*

陈英武 谭跃进 汪浩

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

**摘要** 本文直接针对模糊集,提出了三种基于模糊集运算的逻辑神经元,即 AND、OR 和 AND/OR。基于上述神经元,提出了一种应用于动态系统建模的实用的模糊关系网络模型,通过一个简单实例,证实了上述模型建模算法的学习能力和快速计算能力。

**关键词** 模糊神经元, 动态系统, 建模

**分类号** TN99

---

## A Neuron-Inspired Fuzzy Relation Model of Dynamic System And Its Learning Algorithms

Chen Yingwu Tang Yuejin Wang Hao

(Department of Systems Engineering and Mathematics

National University of Defense Technology, Changsha, Hunan, 410073)

**Abstract** In view of fuzzy sets and their operations, three kinds of logical neurons, i. e., AND, OR and AND/OR neurons can be classified into two types: weighted and relational. Using AND, OR and AND/OR neurons, a fuzzy relational model for dynamic system modeling is provided as well as its learning algorithms. By a simple example, the soundness and learning capability of the algorithms are verified.

**Key words** Fuzzy Neurons, Dynamic System, Learning Algorithm, Modeling

---

动态系统的模糊关系建模方法<sup>[5,6]</sup>,实际上是一种基于牛顿梯度下降的方法,而这正是神经网络的一种典型算法<sup>[1]</sup>。考察其算法结构,我们可把  $X(t+1)$  与  $X(t)$ ,  $Y(t)$  与  $X(t)$  之间的关系看成是一种映射关系,关系矩阵  $R$  和  $S$  (或者  $A$  和  $C$ ) 可以看作是一种映射网络。因此,这种算法就是一种学习网络,而且是一种监督的学习方式(Supervised

---

\* 国防科技预研基金,国防科技大学青年基金资助项目

1996 年 9 月 16 日收稿

Learning).

神经网络(亦称人工神经网络)是模拟人脑神经元组织结构,以及触发、学习等方式,从而抽象出来的若干算法方法。目前,神经网络已受到各门学科的高度重视,人们已经在应用中发现它的巨大潜力和重要前景。基于模糊建模算法的学习网络特征,我们将提出基于模糊逻辑的神经网络模型,以实现定性定量的复杂的非线性映射建模。

本文旨在提出一种直接针对模糊集并基于模糊逻辑运算的神经元模型,并将其应用于动态系统建模,使其具有较强的学习能力和快速运算能力。因此,本文首先提出基于模糊运算的三种逻辑神经元的形成及表达(AND、OR 和 AND/OR 神经元),进而讨论了基于神经元的模糊状态空间模型的形式,并导出了建模学习算法。最后,结合实例给出了数值分析结果,说明了算法的正确性和可行性。

## 1 模糊神经元(Fuzzy Neurons)

我们将直接基于模糊集建立模糊神经元,设模糊集  $x$  的论域为  $Q = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ , 于是采用隶属函数,  $x$  可以表示为:  $x = (\mu_1/p_1, \mu_2/p_2, \dots, \mu_l/p_l)$  或简写为  $x = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$ 。

就某一个神经元而言,其输入输出关系实际上是一种映射关系;就模糊映射而言,就可能有两种情况,一种是输入输出是相同论域的模糊集,即定义在相同的支撑集上,另一种则是定义在不同论域上。下面将分别给出两种情形的神经元形式。

### 1. 加权神经元(Weighted Neurons)

设输入输出定义在相同论域上,那么它们之间可以用简单加权方式运算。考虑到模糊集的基于运算方,在 OR 和 AND 两种,在此,我们可以定义两种基于的模糊神经元 AND 和 OR(如图 1 所示)。



图 1 基本的模糊神经元(AND 和 OR)

这里,设  $x_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{il})$  即 AND 和 OR 的输入输出关系如下:

$$\text{AND: } y = \bigwedge_{i=1}^n w_i x_i = (\bigwedge_{i=1}^n w_i \mu_{i1}, \bigwedge_{i=1}^n w_i \mu_{i2}, \dots, \bigwedge_{i=1}^n w_i \mu_{il}) \quad (1)$$

$$\text{OR: } y = \bigvee_{i=1}^n w_i x_i = (\bigvee_{i=1}^n w_i \mu_{i1}, \bigvee_{i=1}^n w_i \mu_{i2}, \dots, \bigvee_{i=1}^n w_i \mu_{il}) \quad (2)$$

但在有些情况下,输入输出关系并不如此简单,而需要将上述二者结合起来考虑。

这时就得到一种混合型的模糊神经元,我们称之为 AND/OR。这时,AND/OR 的输入输出的关系比 AND 或 OR 都要复杂,而且 AND 和 OR 分别都是 AND/OR 的特殊情况。当  $\lambda = 1, \gamma = 0$  时,AND/OR 等效于 AND,而当  $\lambda = 0, \gamma = 1$  时,AND/OR 等效于 OR。一般情况下,有:

$$\begin{aligned} y &= \text{AND/OR} w_i x_i \\ &= (\bigwedge_{i=1}^n (\lambda w_i \mu_{i1}, \gamma \bigvee_{i=1}^n w_i \mu_{i1}), \dots, (\bigwedge_{i=1}^n (\lambda w_i \mu_{il}, \gamma \bigvee_{i=1}^n w_i \mu_{il}))) \quad (3) \end{aligned}$$

以上  $w_i (i= 1, \dots, n)$  是权数, 一般情况下, 应满足  $\lambda, \forall w_i (i= 1, \dots, n) \in [0, 1]$ , 但不要求

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

## 2、关系神经元(Relational Neurons)

在实际问题中, 很可能会出现输入输出定义在不同论域上的情况。这时输入输出之间不能用简单的加权方式进行运算, 而必须定义一种关系神经元。

关系神经元形式与加权神经元基本相同, 只是将权系数  $w_i, \dots, w_n$  换成了关系矩阵  $R_1, \dots, R_n$ . 设  $y$  定义在另一论域上,  $Q = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  于是有:  $R_s = [r_{ij}] (i= 1, \dots, m, s = 1, \dots, 1, j= 1, \dots, n)$ . 于是这时的输入输出关系可以表示为:

$$\text{AND:} \quad y = \bigwedge_i^n x_i \circ R_i \quad (4)$$

$$\text{OR:} \quad y = \bigvee_i^n x_i \circ R_i \quad (5)$$

而 “ $\circ$ ” 是一个模糊关系算子, 其常用方式有 Max-Min 及 Max-Product 两种。对混合型模糊神经元, 上述方式可以类推, 在此亦给出输入输出关系。

$$\text{AND/OR:} \quad y = \text{OR}(\lambda \bigwedge_i^n (x_i \circ R_i), \forall_i \text{OR}_i^n (x_i \circ R_i)) \quad (6)$$

## 2 基于神经元的动态系统模糊关系建模及算法

按文[5], 动态系统的模糊模型如下:

$$\begin{cases} X(t+1) = f(X(t), X(t-1), \dots, X(t-r), U(t, t-r)) \\ Y(t) = g(X(t), X(t-1), \dots, X(t-r), U(t, t-r)) \end{cases} \quad (7)$$

此即考虑一个具有  $r$  阶延迟的动态系统模型。

试验证明, 在基于模糊集运算的神经网络模型中, 隐节点个数的增加并未能明显地改进网络性能。且增加了计算量。这一点可以从模糊关系计算本身具有分布计算特点来解释, 于是对(7)式动态系统, 我们直接用图2所示的模糊神经网络模型来建模。

首先以输出方程为例, 推导学习算法:

$$X(t) = (\mu^{11}(t), \dots, \mu^{l_1}(t), \dots, \mu^{n1}(t), \dots, \mu^{nl_1}(t))$$

$$U(t) = (\omega_{11}(t), \dots, \omega_{l_2}(t), \dots, \omega_{n1}(t), \dots, \omega_{nl_2}(t))$$

$$Y(t) = (v_{11}(t), \dots, v_{l_3}(t), \dots, v_{p1}(t), \dots, v_{pl_3}(t))$$

$$C^i = [C_{wz}^i] (w = 1, \dots, nl_1, z = 1, \dots, pl_3, i = 1, \dots, r)$$

$$D = [d_{wz}] (w = 1, \dots, nl_1, z = 1, \dots, pl_3)$$

于是, 对  $\hat{\wedge}_{AND}$  及  $\hat{\vee}_{OR}$  节点分别有:

$$\hat{v}_j(t) = \text{Min}(\text{Min}_k \text{Min}_r \text{Min}_{l_1} c_{k i_p}^k \mu_{u1v1}(t-k+1), \text{Max}_k d_{k i_p} \omega_{2v2}(t)) \quad \hat{v}_j^{AND} \quad (8)$$

$$\hat{v}_j(t) = \text{Max}(\text{Max}_k \text{Max}_r \text{Max}_{l_1} c_{k i_p}^k \mu_{u1v1}(t-k+1), \text{Max}_k d_{k i_p} \omega_{2v2}(t)) \quad \hat{v}_j^{OR} \quad (9)$$

对 AND/OR 节点有:  $\hat{v}_j = \text{Max}(\lambda \hat{v}_j^{AND}, \forall \hat{v}_j^{OR})$  (10)

$$i_p = (i-1) \cdot l_3 + j$$

其中(文[5]):

$$u_1 = u(k, l_1), v_1 = v(k, l_1)$$

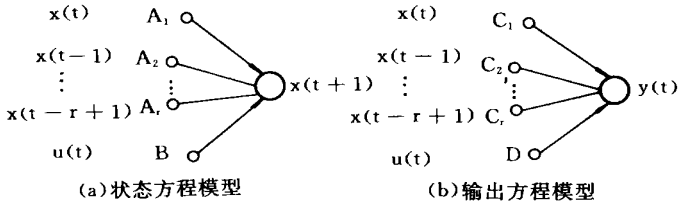


图2 基于神经元的模糊关系网络模型

$$u_2 = u(k, l_2), v_2 = v(k, l_2)$$

$$E = \sum_{t=1}^K \sum_{k=1}^p \sum_{g=1}^{l_3} (\hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t) - \nu_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t))^2$$

定义性能指标:  $E =$

于是:

$$\frac{\partial E}{\partial c_{wz}^i} = 2 \sum_{t=1}^K (\hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t) - \nu_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)) \frac{\partial \hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial c_{wz}^i} \quad (11)$$

对 AND:

$$\frac{\partial \hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}}{\partial c_{\omega}^i} = \begin{cases} \mu_{u(w, l_1)v(w, l_1)}(t - i + 1) & \text{若 } \mathcal{Q}(13), \mathcal{Q}(14), \mathcal{Q}(15) \text{ 为真} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathcal{Q}: \min_{1 \leq k \leq r} \max_{1 \leq k \leq n_{l_1}} c_{kz}^k \mu_{u_1 v_1}(t - k + 1) \quad \max_{1 \leq k \leq m_{l_2}} d_{kz} \omega_{2v_2}(t) \quad (13)$$

$$\mathcal{Q}: \max_{1 \leq k \leq r} c_{kz}^i \mu_{u_1 v_1}(t - i + 1) \quad \min_{1 \leq k \leq m_{l_2}} c_{kz}^k \mu_{u_1 v_1}(t - k + 1) \quad (14)$$

$$\mathcal{Q}: c_{wz}^i \mu_u(w, l_1) v(w, l_1)(t - i + 1) \quad \min_{1 \leq k \leq m_{l_1}} c_{kz}^k \mu_{u_1 v_1}(t - i + 1) \quad (15)$$

对 OR:

$$\frac{\partial \hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial c_{\omega}^i} = \begin{cases} \mu_{u(w, l_1)v(w, l_1)}(t - i + 1) & \text{若 } \mathcal{Q}(17), \mathcal{Q}(18), \mathcal{Q}(19) \text{ 为真} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathcal{Q}: \max_{1 \leq k \leq r} \max_{1 \leq k \leq n_{l_1}} c_{kz}^k \mu_{u_1 v_1}(t - k + 1) \quad \max_{1 \leq k \leq m_{l_2}} d_{kz} \omega_{2v_2}(t) \quad (17)$$

$$\mathcal{Q}: \max_{1 \leq k \leq n_{l_1}} c_{kz}^i \mu_{u_1 v_1}(t - i + 1) \quad \min_{1 \leq k \leq m_{l_2}} \max_{1 \leq k \leq n_{l_1}} c_{kz}^k \mu_{u_1 v_1}(t - k + 1) \quad (18)$$

$$\mathcal{Q}: c_{wz}^i \mu_{u_1 v_1}(t - i + 1) \quad \max_{1 \leq k \leq n_{l_1}} c_{kz}^k \mu_{u_1 v_1}(t - i + 1) \quad (19)$$

又

$$\frac{\partial E}{\partial c_{wz}^i} = 2 \sum_{j=1}^K (\hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t) - \nu_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)) \frac{\partial \hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial c_{wz}^i}$$

对 AND/OR:

$$\frac{\partial \hat{\nu}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial c_{wz}^i} = \begin{cases} \mu_{u(w, l_1)v(w, l_1)}(t - i + 1) & \text{若条件 } \mathcal{Q}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \text{ 为真} \\ \nu_{\mu_{u(w, l_1)v(w, l_1)}}(t - i + 1) & \text{其它} \end{cases} \quad (20)$$

$$\hat{v}_j = \text{Max}(\lambda \hat{\mathcal{V}}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}^{AND}, \mathcal{Y}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}^{OR}) \quad (21)$$

且

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} = 2 \sum_{L=1}^k \sum_{h=1}^p \sum_{g=1}^{l_3} (\hat{v}_{hg}(t) - v_{hg}(t)) \frac{\partial \hat{v}_{hg}(t)}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{Y}} = 2 \sum_{t=1}^t \sum_{h=1}^p \sum_{g=1}^{l_3} (\hat{v}_{hg}(t) - v_{hg}(t)) \frac{\partial \hat{v}_{hg}(t)}{\partial \mathcal{Y}}$$

$$\frac{\partial \hat{v}_{hg}(t)}{\partial \lambda} = \begin{cases} \hat{v}_{hg}^{AND} & \text{若条件 } \mathcal{Q}(23) \text{ 为真} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (22)$$

$$\mathcal{Q}: \lambda \hat{v}_{hg}^{AND} < \mathcal{Y}_{hg}^{OR} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_{hg}(t)}{\partial \mathcal{Y}} = \begin{cases} \mathcal{Y}_{hg}^{OR} & \text{若条件 } \mathcal{Q}(23) \text{ 为假} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (24)$$

又

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{wz}} = 2 \sum_{t=1}^K (\hat{v}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t) - v_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)) \frac{\partial \hat{v}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial u_{wz}} \quad (25)$$

对 AND:

$$\frac{\partial \hat{v}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial d_{\omega z}} = \begin{cases} \omega_{(w, l_1)v(w, l_2)}(t) & \text{若条件 } \mathcal{Q} \text{ 为假, 且 } \mathcal{Q}(27) \text{ 为真} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (26)$$

$$\mathcal{Q}: d_{wz} \cdot \omega_{(w, l_2)v(w, l_2)} \geq \text{Max}_{\substack{1 \leq k \leq m \\ k \neq w}} d_{kz} \omega_{(k, l_2)v(k, l_2)}(t) \quad (27)$$

对 OR

$$\frac{\partial \hat{v}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial d_{\omega z}} = \begin{cases} \omega_{(w, l_2)v(w, l_2)}(t) & \text{若条件 } \mathcal{Q} \text{ 为真, 且 } \mathcal{Q} \text{ 为真} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (28)$$

对 AND/OR:

$$\frac{\partial \hat{v}_{u(z, l_3)v(z, l_3)}(t)}{\partial d_{\omega z}} = \begin{cases} \lambda \omega_{(w, l_2)v(w, l_2)}, & \text{若条件 } \mathcal{Q} \text{ 为真, } \mathcal{Q} \text{ 为真} \\ \mathcal{Y} \omega_{(w, l_2)v(w, l_2)}, & \text{若条件 } \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \text{ 为假, } \mathcal{Q} \text{ 为真} \\ 0 & \end{cases} \quad (29)$$

由(11) ~ (21), 可以得  $c_{wz}^i, d_{wz}, \lambda, \mathcal{Y}$  的计算方法。

同理对状态方程可推导出  $a_{wz}^i, b_{wz}$  及相应的  $\lambda, \mathcal{Y}$  的计算方法。

### 3 实例: 算法实现及结果

为验证建模算法的合理性和正确性, 仍以文[5]中的简单实例, 用 PASCAL 语言在 PC 机实现。设有状态变量、输出变量和控制变量的时间序列数据(隶属度)分别如表 1、2、3 所示。取  $r=2$ , 状态模型和输出模型的算法收敛情况, 即性能指标随迭代步数的变化情况, 分别可从图 3 看出。基于神经元的模糊关系建模算法明显地优于纯模糊关系模型(文[5])。因为这里的迭代误差可以收敛到零。同时, 也可以看出, AND/OR 神经元学习模型并未能改进模型性能。

表 1 状态变量

$t$	$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	$\mu_{13}$	$\mu_{14}$
1	0.97	0.11	0.00	0.00
2	0.00	0.35	1.00	0.00
3	0.08	0.70	0.30	0.00
4	0.00	0.02	0.15	0.95
5	0.00	0.10	0.30	0.95
6	0.00	0.10	0.45	0.02
7	0.00	0.12	0.50	0.01
8	0.00	0.10	0.15	0.80

表 2 输出变量( $Y$ )

$t$	$\nu_{11}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{14}$
1	0.00	0.35	1.00	0.00
2	0.08	0.70	0.30	0.00
3	0.00	0.02	0.15	0.95
4	0.00	0.10	0.30	0.95
5	0.00	0.10	0.45	0.02
6	0.00	0.12	0.50	0.01
7	0.00	0.10	0.15	0.80
8	0.00	0.25	0.90	0.60

表 3 控制变量( $U$ )

$t$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
1	0.00	0.27	0.80
2	0.00	0.35	1.00
3	0.08	0.70	0.30
4	0.00	0.02	0.15
5	0.00	0.10	0.30
6	0.00	0.10	0.45
7	0.00	0.12	0.50
8	0.00	0.10	0.15

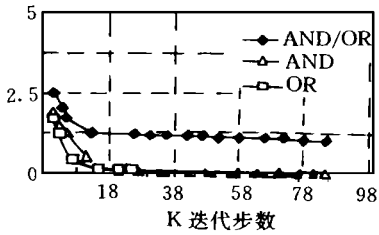


图 3 状态模型的性能指标变化情况

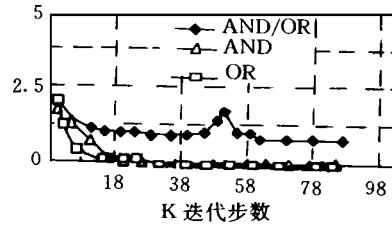


图 4 输出模型的性能指标变化情况

## 参考文献

- 1 焦李成. 神经网络系统理论. 西安电子科技大学出版社, 1992
- 2 Pedrycz. W. Fuzzy Neural Networks and Neurocomputations. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 56(1)
- 3 Kosko. B. Neural Networks and Fuzzy Systems. Prentice-Hall, Inc, 11992
- 4 Ishiuchi. H. and Tanaka. H. An Architecture of Neural Networks with Interval Weights and its Application to Fuzzy Regression Analysis. Fuzzy Sets and Systems. 1993, 57
- 5 陈英武. 动态系统的模糊关系建模算法及实现. 模糊系统与数学, 1997, (1)
- 6 陈英武. 一种定性定量综合集成方法及其在宏观经济预警分析中的应用:[ 博士论文] 国防科技大学, 1994

(责任编辑 潘 生)