国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 19 卷第 4 期　1997 年 8 月　Vol. 19 No. 4

平坦同态下模的内射维数*

戴清平　　刘青宝
(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　$A \xrightarrow{f} B$, f 是平坦同态, M 是 A－ 模, 本文给出了 $id_A M$ 与 $id_B(M \leftarrow_A B)$ 的不等式关系。

关键词　平坦同态, 内射维数
分类号　O153.3

Injective Dimension under Flat Base Change

Dai Qingping　　LiuQingbao
(Department of System Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　F is a flat homomorphism from ring A to ring B. M is a A－ module. We have obtained the inequation between $id_A M$ and $id_B(M \leftarrow_A B)$.

Key Words　Flat Homomorphism, Injective Dimension

本文考虑的环都是含单位的交换诺特环。我们对所用记号作一个说明。spec(A) 是环 A 的素谱。M 是 A－ 模, $A_{nn}(M) = \{a \quad aM = 0, a \in A\}$, $supp(M) = \{P \quad M_P \neq 0, P \in spec(A)\}$, $A_{ss}(M) = \{P \quad \exists x \in M, A_{nn}(x) = P, P \in spec(A)\}$, $V(A_{nn}(M)) = \{P \quad P \supseteq A_{nn}(M), P \in spec(A)\}$, $Max(M) = \{m \quad m \in supp(M)$, m 是 A 的极大理想$\}$。Bass 数 $\mu^d(P, M) = \dim_{k(p)} Ext^d_{A_P}(k(P), M_P)$, 其中 $K(P) = A_P/pA_p$, Bass 数表示 M 的极小内射分解分解第 d 个位置时所含不可分解内射模 E(A/P) 的个数。$A \xrightarrow{f} B$, 对于 $P \in spec(A)$, 记 $F(p) = k(p) \leftarrow_A B$。

引理 1　M、N 是有限生成 A－ 模, 下列条件等价:

(Ⅰ) $supp(M) \cap supp(N) = \phi$;　　(Ⅱ) $A_{nn}(M) + A_{nn}(N) = A$;

(Ⅲ) $Ext^i_A(M, N) = 0 \quad (i \geq 0)$;　　(Ⅳ) $Ext^i_A(N, M) = 0 \quad (i \geq 0)$;

(Ⅴ) $M \leftarrow_A N = 0$;　　(Ⅵ) $Max(M) \cap Max(N) = \phi$.

证明　(Ⅴ)⇔(Ⅰ)⇔(Ⅱ)

*　国防科大青年基金资助项目
1997 年 5 月 22 日修订

$M \otimes_A N = 0 \Leftrightarrow \mathrm{supp}(M \otimes_A N) = \phi \Leftrightarrow \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N) = \phi \Leftrightarrow V(A_{nn}(M)) \cap V(A_{nn}(N)) = \phi \Leftrightarrow V(A_{nn}(M) + A_{nn}(N) = \phi \Leftrightarrow A_{nn}(M) + A_{nn}(N) = A$

(Ⅱ)⇒(Ⅲ),(Ⅱ)⇒(Ⅳ)是显然的。(Ⅳ)⇒(Ⅰ),(Ⅲ)⇒(Ⅰ)证法相同,下证(Ⅲ)⇒(Ⅰ)。

如果 $\mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N) \neq \phi$,取 $P \in \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N)$,由Ⅲ)对任意 $i \geq 0$ 有 $\mathrm{Ext}^i_{A_P}(M_P, N_P) = 0$。

我们考虑如下论断:(A, m, k) 是局部环,M、N 是非零有限生成模,至少有某 i 使 $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \neq 0$。

如果 $A_{nn}(M) \neq 0$,由 Nakayama 引理 $A_{nn}(M) \cdot N \neq N$,$\mathrm{depth}(A_{nn}(M), N) \leq \mathrm{depth}(m, N) \leq \dim N \leq \dim A < +\infty$。用 Ext 函子表示存在某 $d \leq \dim A$ 使 $\mathrm{Ext}^d_A(M, N) \neq 0$。如果 $A_{nn}(M) = 0$,$\mathrm{supp}(M) = \mathrm{spec}(A)$,利用 Bourbaki 定理:

$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(M, N)) = \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(N)$。

有 $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(M, N)) = \mathrm{spec}(A) \cap \mathrm{Ass}(N) = \mathrm{Ass}(N) \neq \phi$,因此 $\mathrm{Hom}_A(M, N) \neq 0$。

上述论断说明在(Ⅲ)⇒(Ⅰ)中假定 $\mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N) \neq \phi$ 是错误的。

(Ⅰ)⇔(Ⅵ)

(Ⅰ)⇒(Ⅵ)是显然的。反之设 $P \in \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N) \neq \phi$,则 $V(P) \subseteq \mathrm{supp}(N) \cap \mathrm{supp}(M)$,取极大理想 $m \in V(P)$,$m \in \mathrm{Max}(M) \cap \mathrm{Max}(N) = \phi$,矛盾。

推论 1　下列结论成立:

(1) (A, m, k) 是局部环,M、N 是有限生成模。如果 $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0 (i \geq 0)$,那么或者 $M = 0$ 或者 $N = 0$。

(2) N 是有限生成非零内射模。如果 $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$,那么 $\mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N) = \phi$。

(3) A 是自内射环,$\mathrm{Hom}_A(M, A) = 0$,那么 $M = 0$。

(4) M 是有限生成非零投射模,$\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$,那么 $\mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N) = \phi$。

(5) M 是有限生成模,如果 $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0 (i \geq 0)$,那么 $M = 0$。

证明　(1) 由于 $M = 0 \Leftrightarrow$ 对于每个 $P \in \mathrm{spec}(A)$ 有 $M_P = 0 \Leftrightarrow$ 对于每个 $m \in \mathrm{Max}(A)$ 有 $M_m = 0$,再由引理 1 中结论(Ⅵ)即可得结论。

(2) 如果 M 有限生成,结论成立。设 $\{M_i\}_{i \in I}$ 是 M 的所有有限生成模构成的集,那么 $M = \varinjlim_i M_i$。设 $P \in \mathrm{supp}(M)$,$0 \neq M_P = M \otimes_A A_P = \left(\varinjlim_i M_i\right) \otimes_A A_P = \varinjlim_i (M_i \otimes_A A_P)$,因而 $P \in \bigcup_i \mathrm{supp}(M_i)$。这说明 $\mathrm{supp}(M) = \bigcup_i \mathrm{supp}(M_i)$,再由 N 内射及 $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$ 有 $\mathrm{Hom}_A(M_i, N) = 0$。由引理 1 知 $\mathrm{supp}(M_i) \cap \mathrm{supp}(N) = \phi$。因此得结论 2 成立。

(3) 由(2)的结果 $\mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(A) = \phi$,$\mathrm{supp}(M) = \phi$,$M = 0$。

(4) 与(2)的证明一致。

(5) 引理 1 的直接结果。

引理 2　设 A-模 M 的极小内射分解是:

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots\cdots$$

那么(1) $\bigcup_i \mathrm{supp}(E^i) = \mathrm{supp}(M)$;

(2) M 有限生成,则 $\bigcup_i A_{ss}(E^i) = supp(M)$。

证明 (1) 一般地对于正合列 $0 \to M \to N \to L \to 0$ 有 $supp(N) = supp(M) \cup supp(L)$。设 N 是 M 的内射包, $N = \bigoplus_{\mu^0 \neq 0} \mu^0(P, M) E(A/P)$, $0 \neq \mu^0(P, M) = \dim_{k(p)} Hom_{A_p}(k(p), M_p)$, 这说明 $P \in supp(M)$。因此 $supp(N) = \bigcup_{\mu^0 \neq 0} V(P) \subseteq supp(M)$, 因此 $supp(N) = supp(M)$, $supp(L) \subseteq supp(M)$。由极小内射分解定义, 重复上述过程有 $supp(M) = \bigcup_i supp(E^i)$。

(2) 设 M 有限生成。

$\bigcup_i A_{ss}(E^i) \subseteq \bigcup_i supp(E^i) = supp(M)$。另外只要证对任意 $P \in supp(M)$ 存在某 i 使 $\mu^i(P, M) \neq 0$。$\mu^i(P, M) \neq 0 \Leftrightarrow Ext^i_{A_p}(k(P), M_p) \neq 0$, 由推论 1 的结论知的确存在某 i 使 $\mu^i(P, M) \neq 0$。

引理 3 $A \xrightarrow{\phi} B$, ϕ平坦, 对于 A- 模 M 有:

$supp_B(M \leftarrow_A B) = \left\{ q \quad q \in spec(B), q \cap A = P \in supp_A(M) \right\}$。

证明 $(M \leftarrow_A B)_q = (M \leftarrow_A B) \leftarrow_B B_q = M \leftarrow_A (B \leftarrow_B B_q) = M \leftarrow_A B_q = (M \leftarrow_A B_p) \leftarrow_{B_p} B_q = (M_p \leftarrow_{A_p} B_p) \leftarrow_{B_p} B_q = M_p \leftarrow_{A_p} B_q$。

其中 $P = q \cap A$。

由于 ϕ平坦, 导出映射 $\phi!$ $A_p \to B_q$ 忠实平坦, 因此 $(M \leftarrow_A B)_q \neq 0 \Leftrightarrow M_p \leftarrow_{A_p} B_q \neq 0 \Leftrightarrow M_p = \neq 0$。

引理 4 $(R, m, k) \xrightarrow{g} (S, n, l)$, 是平坦局部环同态, $C = S/ms$, E 是内射 R- 模, 那么:

$$Ext^i_c(l, Hom_R(k, E) \leftarrow_R S) = Ext^i_s(l, E \leftarrow_R S), \forall i \geq 0$$

证明 假设 I^* 是 $E \leftarrow_R S$ 的 S- 模极小内射分解, 由平坦性及 E 为 R 内射有:

$$Ext^i_s(C, E \leftarrow_R S) = Ext^i_R(k, E) \leftarrow_R S = 0, \forall i > 0$$

因此 $Hom_S(C, I^*)$ 是 $Hom_S(C, E \leftarrow_R S)$ 的 C- 模内射分解。利用模的相伴性定理有:

$$Hom_C(l, Hom_s(C, I^*)) = Hom_s(l \leftarrow_C C, I^*) = Hom_s(l, I^*)$$

再者 $Hom_S(C, E \leftarrow_R S) = Hom_R(k, E) \leftarrow_R S$。

结合起来便得结论。

定理 1 $A \xrightarrow{f} B$, f 平坦, $E = E(A/P)$, $P \in spec(A)$, 下列结论成立:

(1) 如果 $q \in spec(B)$, 使 $\mu^d(q, E \leftarrow_A B) \neq 0$, 那么 $q \cap A = P$。

(2) $id_B(E \leftarrow_A B) = id_{F(p)} F(P)$。

证明 (1) 设 $S = B_q$, $R = A_{q \cap A}$, $C = S/(q \cap A)S$, $l = k(q)$, $k = k_{(q \cap A)}$, $E' = E_{q \cap A}$ 是内射 R- 模, 由引理 4 有:

$Ext^d_c(l, Hom_R(k, E') \leftarrow_R S) = Ext^d_s(l, E \leftarrow_R S) \neq 0$, 因此有: $Hom_R(k, E') = Hom_A(A/_{q \cap A}, E) \leftarrow_A R \neq 0$, $Hom_A(A/_{q \cap A}, E) \neq 0$, $q \cap A \subseteq P$。由引理 3, $q \cap A \supseteq P$, 因此 $q \cap A = P$。

(2) 设 $\mu^d(q, E \leftarrow_A B) \neq 0$, $P = q \cap A$, $Hom_R(k, E') \leftarrow_R S = k \leftarrow_R S = C$, $Ext^d_c(l, c) = Ext^d_s(l, E \leftarrow_R S) \neq 0$。所以我们有 $id_{F(P)} F(P) \geq id_c C \geq d$。因此 $id_B(E \leftarrow_A B) \leq id_{F(P)} F(P)$。反之, 设 $r \leq id_{F(P)} F(P)$, 存在 $q \in spec(B)$, $q \cap A = P$, $id_c C \geq r$, 由引理 4, $Ext^r_s(l, E \leftarrow_R S) = Ext^r_c(l, c)$

$\neq 0$。这说明 $id_B(E \overleftarrow{\otimes}_A B) \geq id_{F(P)} F(P)$。

定理 2　$A \xrightarrow{f} B$, f 平坦, $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots\cdots$ 是 A－ 模 M 的极小内射分解, 那么:

(1) $id_B(M \overleftarrow{\otimes}_A B) \leq \underset{P \in \bigcup_i Ass(E^i)}{Max} id_{F(P)} F(P) + id_A M$;

(2) 当 M 有限生成时, $id_B(M \overleftarrow{\otimes}_A B) \leq \underset{P \in supp(M)}{Max} id_{F(P)} F(P) + id_A M$.

证明　(1) 不妨设右边 $< +\infty$。我们有 B－ 模正合列 $0 \to M \overleftarrow{\otimes}_A B \to E^0 \overleftarrow{\otimes}_A B \to E^1 \overleftarrow{\otimes}_A B \cdots \to E^d \overleftarrow{\otimes}_A B$, $d = id_A M$, $id_B(E^i \overleftarrow{\otimes}_A B) = \underset{P \in supp(M)}{Max} id_{F(P)} F(P) < +\infty$。

一般地我们考虑下列问题:

A－ 模正合列 $0 \to N \to N_0 \to N_1 \cdots \to N_d \to 0$, $id_A N_i < +\infty$ $(0 \leq i \leq d)$, 分解为短正合列 $0 \to N \to N_0 \to F_0 \to 0$, $0 \to F_0 \to N_1 \to F_1 \to 0 \cdots 0 \to F_{d-3} \to N_{d-2} \to F_{d-2} \to 0$, $0 \to F_{d-2} \to N_{d-1} \to N_d \to 0$。

设 $t_1 = Max\{id_A N_{d-1}, id_A N_d\}$, 考虑导出正合列:

$$Ext_A^{t_1+1}(X, N_d) \to Ext_A^{t_1+2}(X, F_{d-2}) \to Ext_A^{t_1+2}(X, F_{d-1})$$

由此 $id_A F_{d-2} \leq t_1 + 1$, 由简单归纳法知: $id_A N \leq Max\{id_A N_0, \cdots, id_A N_d\} + d$

在我们的问题中有:

$$\begin{aligned} id_B(M \overleftarrow{\otimes}_A B) &\leq Max\{id_B(E^0 \overleftarrow{\otimes}_A B), \cdots, id_B(E^d \overleftarrow{\otimes}_A B)\} + d \\ &= \underset{P \in \bigcup_i Ass(E^i)}{Max} id_{F(P)} F(P) + id_A M \end{aligned}$$

(2) 当 M 有限生成时, 利用引理 2 即得结论。

例　A 是含单位的交换诺特环, $x_1, \cdots, x_n$ 是可交换不定元, M 是 A－ 模, $B = A[x_1 \cdots x_n]$ 是忠实平坦 A－ 模。设 $P \in spec(A)$, $F(P) = k(P) \overleftarrow{\otimes}_A B = k(P)[x_1 \cdots x_n]$ 是域 k(P) 上的 n 维多项式环, $id_{F(P)} F(P) = n$。因此:

$$id_B M[x_1 \cdots x_n] \leq n + id_A M$$

参考文献

1　Mutsumura H. Commutative Algebra, 2nd edition, The Benjamin, Inc., 1980

2　Atiyah MF., Macdonald I G. Introduction to commutative Algebra, Addison Wesley. Reading MA. 1969

3　Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra, New Yory, 1979

4　Strooker J R. Homological Question in Local Algebra. Lond. Math. soc. LNS 145, 1991

5　Hartshorne, R. Residues and Duality. LN 20, 1966

6　Bourbaki N. Algebra commutative, 1961

7　bass H. On the ubiquty of Gorenstin rings. Math. Z., 82, 1963

8　Matlis E. Injective Modules over Noetherian rings. Pac J Math., 8, 1958

9　Foxby H－B. Injective Modules under Flat Base change. Pro. Amer. Math. Soc. 1975, 5

(责任编辑　潘生)