国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第4期 1997年8月 Vol. 19 No. 4

可度量的局部凸空间的弱集性[1]

覃左平
(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文用非标准方法证明并推广了 Eberlein- Smullian 定理,证明了可度量的局部凸空间中 W- 紧,W- 序列紧及 W- 可数紧等价。

关键词 W- 紧,W- 序列紧,非标准模型
分类号 O141. 41

W- Compactness Metrizable Locally Convex Spaces

Qing Zuoping
(Department of System Engineering and AppliedMathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract Using the method of nonstandard analysis, we prove and generalize the theorem of Eberlein- Smulian, and obtain the equivalence of W- compact、W- coutably compact and W- sequentially compact in metrizable locally convex spaces.

Key Words W- compact, W- coutably compact, W- sequentially compact

1 基本概念及引理

设 (X, τ) 为一拓扑空间, $A \subset X$ 为 X 的子集, 称 A 为 τ- 紧的, 如果 A 的任一网 $\{x_\alpha\} \subset A$ 有收敛于 A 的子网; 称 A 是 τ- 可数紧的, 如果 A 的任一序列 $\{x_n\} \subset A$ 有收敛于 A 的子网; 称 A 是序列紧的, 如果 A 的任一序列 $\{x_n\}$ 有收敛于 A 的子序列。对于一般的拓扑空间而言, 可数紧条件最弱, 而紧与序列紧则互不包含, 且 $A \subset X$ 紧的充要条件是 A 的任一有有限交性质的闭集族有非空交, A 可数紧的充要条件是 A 的任一有有限交性质的闭集列有非空交。但对于 Banach 空间中的弱拓补, Eberlein - Smulian 定理告诉我们: "这几种紧性等价 "。其证明用到了精彩的构造性方法。本文利用非标准方法, 将该结论推广到可度量的局部凸空间。

设 $^*S$ 是一非标准模型, 且其标准元包含了我们所要讨论的所有的标准对象, 如拓扑空间, 局部凸空间等等, 并设 $^*S$ 是多饱和的。

---

[1] 国家自然科学基金资助课题
1997年4月9日修订

设(X,τ)为拓扑空间,$\forall x\in X$,设Γ_x为x的$\tau-$邻域全体,$m_\tau(x)\triangleq\bigcap_{G\in\Gamma_x}{}^*G$称为$x$的单子;$\forall x\in{}^*X$,称$x$是近标准的,如果存在$x_0\in X$使$x\in m_\tau(x_0)$,此时记为$x\simeq x_0(\tau)$,${}^*X$的近标准点全体记为$\mathrm{ns}({}^*X)$。

引理1: 设(X,τ)为Hausdorff拓扑空间,$A\subset X$则:

(Ⅰ)A是X的紧子集当且仅当$\forall x\in{}^*A$,存在$a\in A$,使$x\in m_\tau(a)$。

(Ⅱ)A是$\tau-$可数紧的当且仅当$\forall\{x_n\}\subset A$,$\exists\nu_0\in{}^*N\backslash N$及$x\in A$使$x_{\nu_0}\simeq x$。

证: (Ⅰ)见[1]

(Ⅱ)必要性:设$\{x_n\}\subset A$,不妨设$\{x_n\}$两两不同。由A是可数紧的知,$\{x_n\}$有聚点x,不妨设$x\notin\{x_n\}$。现在我们定义二元关系:

$P\subset\Gamma_x\times B$,这里Γ_x为x的邻域全体,B为点列$\{x_n\}$全体。$(G,x_n)\in P\Leftrightarrow x_n\in G$。不难验证$P$是$\Gamma_x$上的共点关系。由共点定理,存在$b\in{}^*B=\left\{x_n:n\in{}^*N\right\}$使$b\in m_\tau(x)$。由于$X$是Hausdorff的,且$x\neq x_n\ \forall n\in N$,存在$\nu_0\in{}^*N\backslash N$使$b=x_{\nu_0}$,必要性得证。

充分性:设$\{x_n\}\subset A$,$\nu_0\in{}^*N\backslash N$使$x_{\nu_0}\in m_\tau(x)$,$x\in A$,往证$x$为$\{x_n\}$的聚点,为此只需证明对$x$的任一邻域$G$,$\{x_n\}\cap G$为无限集。若不然,则有$n_0$使$\{x_n:n\geq n_0,n\in N\}\cap G=\Phi\Rightarrow\{x_n:n\geq n_0,n\in{}^*N\}\cap{}^*G=\Phi\Rightarrow x_{\nu_0}\notin{}^*G$。这与$x_{\nu_0}\in m_\tau(x)$矛盾。于是引理得证。

2 主要定理

定理1: 设X是赋范线性空间,$A\subset X$是X的子集,则A是弱可数紧的充要条件是A是弱序列紧的。

证: 只需证必要性。设$\{x_n\}\subset A$,令$M\equiv\overline{\mathrm{span}\{x_n\}}\subset X$,则$M$是可分的赋范线性空间。设$\{y_k\}$为$M$的稠子集,对任意的$k\in N$,取$f_k\in X'$使$f_k(y_k)=\|y_k\|$且$\|f_k\|=1$,则不难看出$\{f_k:k=1,2,\cdots\}$分离$M$中的点,即$y\in M,f_k(y)=0,k=1,2,\cdots\Rightarrow y=\theta$。又因弱可数紧集是有界的,故由对角线法知,存在$\{x_n\}$的子列$\left\{x_{n_k}\right\}$使对每个$m\in N$,$\lim\limits_{k\to\infty}f_m(x_{n_k})=C_m$存在,而$\left\{x_{n_k}\right\}\subset A$且$A$为弱可数紧的。由引理知,存在$x\in A$及$\nu_0\in{}^*N\backslash N$使$x_{n_{\nu_0}}\simeq x(w)$,(这里$w$代表弱拓扑,下同),亦即$\forall f\in X'$有${}^*f(x)\simeq{}^*f\left(x_{n_{\nu_0}}\right)$。现在证明

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\overset{w}{=}x \tag{1}$$

若不然,则有$f_0\in X'$,$\epsilon>0$及$\left\{x_{n_k}\right\}$的子列$\left\{x_{n_{k_j}}\right\}$使$\left|f_0(x_{n_{k_j}})-f_0(x)\right|\geq\epsilon$对$j=1,2,\cdots$成立。由引理存在$\mu\in{}^*N\backslash N$及$z\in A$使$x_{n_{k_\mu}}\simeq z(w)$,即$\forall f\in X'$

$$f\left(x_{n_{k_\mu}}\right)\simeq f(z) \tag{2}$$

但注意到 $f_m(x)\simeq f_m\left(x_{n_{\nu_0}}\right)\quad\forall m\in N$ 成立

于是,$\forall\nu\in{}^*N\backslash N$及$m\in N$有

$$f_m\left(x_{n_\nu}\right)\simeq C_m\simeq f_m\left((x_{n_{\nu_0}}\right)\simeq f_m(x) \tag{3}$$

从而由(2)及(3)有

$$f_m\left(x_{n_{k_\mu}}\right)\simeq f_m(z)\simeq f_m(x) \tag{4}$$

故 $$f_m(z-x)=0 \quad m=1,2,\cdots \tag{5}$$
又因$\{f_m\}$分离M中的点，且x及z都是$\{x_n\}$的$W-$闭包点，知$x-z\in M\Rightarrow x-z=\theta$。但由于$\left|f_0\left(x_{n_{k_j}}\right)-f_0(z)\right|=\left|f_0\left(x_{n_{k_j}}\right)-f_0(x)\right|\geq\epsilon, j=1,2,\cdots\Rightarrow\left|f_0(x_{n_{k_\mu}})-f_0(z)\right|\geq\epsilon$，而$x_{n_{k_\mu}}\simeq z(w)\Rightarrow\left|f_0(z)-f_0(z)\right|\geq\epsilon$，矛盾，(证毕)。

定理2：若X是可度量的局部凸空间，$A\subset X$，则A是$W-$可数紧的当且仅当A是$W-$序列紧的。

证明：设$\{V_n\}$是X的$\theta-$邻域基，满足$v_{n+1}\subset v_n$且v_n是绝对凸的。又设P_n为v_n的Minkowski泛函，$M_n=\{x\ P_n(x)=0\}$，$X_n=X/M_n$。$\forall\hat{x}\in X_n$记$\|\hat{x}\|_n=P_n(x)$，则$\left(X_n,\|\ \|_n\right)$是赋范线性空间。对任意的$n$，设$\hat{A}_n=A+M_n$。若$A$是$X$的$W-$可数紧的。则我们有$\hat{A}_n$为$X_n$的$W-$可数紧的。事实上，对任意的点列$\{x_k\}\subset\hat{A}_n$因$\{x_k\}\subset A$，故存在$x\in A$及$\nu\in^* N\backslash N$使$\forall f\in X'$有$f(x_\nu)\simeq f(x)$。对于$g\in X_n'$，定义$X$上的线性泛函$f(x)\equiv g\left(\hat{x}\right)$，$x\in X$，我们有$f\in X'$。事实上，$\{x: f(x)<\epsilon\}\supset\{x:\|g\|\ \|\hat{x}\|<\epsilon\}\supset\{x:P_n(x)<\epsilon/\|g\|\}\supset\dfrac{\epsilon}{\|g\|}V_n$，故$f$连续。于是$f(x_v)\simeq f(x)$即$g\left(\hat{x}_v\right)\simeq g(\hat{x})$。由定理1知，$\hat{A}_n$为$X_n$的$W-$序列紧的。由对角线法知存在$\{x_n\}$的子序列$\left\{x_{n_k}\right\}$，使$\forall m\in N, f_m\in X_m'$，存在$z_m\in A$有
$$\lim_{k\to\infty}f_m\left(x_{n_k}\right)=f_m(z_m) \tag{6}$$
又因$\{z_m\}\subset A$，而A是$W-$可数紧的，故存在$z\in A$使z为$\{z_m\}$的$W-$聚点，亦即存在$\nu_0\in^* N\backslash N$使
$$z_{\nu_0}\simeq z(w) \tag{7}$$
现在，因$\{V_n\}$为$\theta-$邻域基，故$\forall f\in X'$，存在n_0使$n\geq n_0$时
$$V=\left\{x\ \ f(x)<1\right\}\supset v_n\supset v_{n_0}\supset\{x\ P_{n_0}(x)<1\} \tag{8}$$
其中$\forall n\geq n_0$，

定义X_n的线性泛函$f_n(\hat{x})\triangleq f(x)$。由(8)知$f_n$是有意义的且$\{f_n(\hat{x})<1\}\supset v_n\Rightarrow\|f_n\|\leq1$，故$f_n\in X_n'$。由(6)知$\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f(z_n)$，$\forall n\geq n_0$。
于是$f\left(z_{\nu_0}\right)=\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f(z)$，即
$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\overset{w}{=}z \qquad \text{(证毕)}$$

定理3：设X是Banach空间，$A\subset X$，则A是弱相对可数紧$\Rightarrow A$是弱相对紧，特别地，A是弱可数紧的$\Rightarrow A$是弱紧的。

证明：设$x\in\bar{A}^w$，往证存在$a\in\bar{A}^w$使$x\simeq a(w)$定义X'上的线性泛函$F(f)\equiv{}^\circ\left({}^*f(x)\right)$，因$\left({}^*\|x\|\right)<\infty$故有$\|F\|=\left({}^*\|x\|\right)<+\infty$，即$F\in X''$。将$X$嵌入到$X''$中，我们证明$F\in J(X)$，亦即存在$a\in X$使$\hat{a}=F$。由于$X$是Banach空间，故只须证明存在$X$的点列$\{x_n\}$使$\|\hat{x}_n-F\|\to0$。现在证明此结论。为证此，先证：$\forall\epsilon>0$，存在有限集$G=\{x_1,x_2,\cdots,x_n)\subset A$及$\delta>0$使
$$\{f:f\in X',\|f\|\leq1,\max_{1\leq i\leq n}f(x_i)<\delta\}\subset\{f: F(f)<\epsilon\} \tag{9}$$
若不然，设对某个$\epsilon>0$，找不到这样的$\delta>0$及有限集$F\subset A$使$\max\limits_{x\in F}f(x)<\delta$，$\|f\|$

$\leq 1 \Rightarrow \ F(f) \ < \epsilon$

取 $x_1 \in A$ 及 $f_1 \in X'$, $\|f_1\| \leq 1$, 使 $f_1(x_1) < \epsilon$ 但 $F(f_1) \geq \epsilon$, 而由 $x \in \overline{{}^*A}^{w}$ 知, 语句 $\exists y \in {}^*A$ 使 $|{}^*f_1(y) - F(f_1)| < \epsilon/2$ 真。

由转换原理存在 $x_2 \in A$ 使 $f_1(x_2) - F(f_1) < \epsilon/2$。现在取 $f_2 \in X'$, $\|f_2\| \leq 1$ 使 $f_2(x_1) < \epsilon/2^2$, $f_2(x_2) < \epsilon/2^2$ 但 $F(f_2) \geq \epsilon$, 再由转换原理, $\exists x_3 \in A$ 使

$$\max_{1 \leq i \leq 2} f_i(x_3) - F(f_i) < \frac{\epsilon}{2^2}$$

以此类推, 我们找到点列 $\{x_n\} \subset A$ 及 $\{f_n\} \subset S_X'$ 使

$$F(f_n) \geq \epsilon \quad n = 1, 2, \cdots \tag{10}$$

$$F(f_n) - f_n(x_k) < \frac{\epsilon}{2^k} \quad n < k \tag{11}$$

$$f_n(x_k) < \frac{\epsilon}{2^n} \quad n \geq k \tag{12}$$

又 $\{x_n\} \subset A$ 而 A 是 $W-$ 可数紧的, 故由引理知, 可找 $\nu_0 \in {}^*N \setminus N$ 及 $x_0 \in A$ 使

$$x_{\nu_0} \simeq x_0(w) \tag{13}$$

由(11)知, $\forall n \in N$ 及 $\nu \in {}^*N \setminus N$ 有

$$F\left(f_n\right) \simeq f_n\left(x_\nu\right) \simeq f_n\left(x_{\nu_0}\right) \simeq f_n\left(x_0\right) \tag{14}$$

由(10)及(14)知, $\forall \mu \in {}^*N$, 有

$$f_\mu(x_0) \geq \epsilon/2 \tag{15}$$

定义 X 上的线性泛函 g 使 $x \in X$

$$g(x) \equiv {}^{\circ}\left(f_{\nu_0}(x)\right)$$

显然 $\|g\| \leq 1$, 故 $g \in X'$, 一方面

$$g(x_m) = {}^{\circ}f_{\nu_0}(x_m) \leq {}^{\circ}\left(\frac{\epsilon}{2^{\nu_0}}\right) = 0$$

由转换原理 ${}^*g(x_\nu) = 0 \quad \forall \nu \in {}^*N$ 成立。

于是由(13)知: $g(x_0) = 0$ (16)

另外 $g(x_0) = \left|{}^{\circ}f_{\nu_0}(x_0)\right| \geq \epsilon/2$ (17)

这与(16)矛盾, 于是(9)得证。现在取

$$V = \{f: f \in X', \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i) < \delta\}, M_n = \operatorname{span}\left\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n\right\},$$

考虑对偶对 $\langle X', X''\rangle$ 注意到

$$F \in \epsilon\left(V \cap S_X\right)^{\circ} = \epsilon\overline{CO}\left(V^{\circ} \cup S_X^{\circ}\right) \subset Mn + \epsilon S_{X''}$$

故 $F \in M_n + \epsilon S_{X''}$。亦即存在 $y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda \hat{x}_i$ 使 $\|F - y_n\| \leq \epsilon$ 成立, 由 ϵ 的任意性, 命题的第一部分得证。若 A 是弱可数紧的, 则若 $x \in {}^*A$, 由上证知存在 $x_0 \in X$ 使 $x \simeq x_0(w)$ 且存在 A 的子序列 $\{x_n\}$ 使 $x_0 \in \overline{\operatorname{span}\{x_n\}} = M$。取 $S_{X'}$ 的子序列 $\{f_n: n = 1, 2, \cdots\}$ 使其分离 M 中的点。

设 $A_{nk} = \left\{y: y \in M, f_n(y) - f_n(x_0) \leq \frac{1}{k}\right\}$, 则 $\{A_{nk}: n, k = 1, 2, \cdots\}$ 为一列 $W-$

闭集,我们有 $\bigcup_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}^{C} \leqslant A$,若不然,由 A 是 W - 可数紧的知存在 n_0 使 $\bigcup_{n,k=1}^{n_0} A_{nk}^{C} \supset A \Rightarrow A \cap \bigcap_{n,k=1}^{n_0} A_{nk} = \Phi$. 注意到 $x_0 \in M$ 且 $x \simeq x_0(w) \Rightarrow x \in^{*} \left(A \cap \bigcap_{n,k=1}^{n_0} A_{nk}\right) \neq \Phi$,矛盾。于是 $\bigcap_{n,k=1}^{\infty} A_{nk} \cap A \neq \Phi$. 设 $y_0 \in \bigcap_{n,k=1}^{\infty} A_{nk} \cap A \Rightarrow f_n(y_0) = f_n(x_0)$. $\forall n \in N$ 成立,又因 $x_0 - y_0 \in M \Rightarrow x_0 - y_0 = \theta$,故 $x_0 \in A$,从而证明了 A 是 W - 紧的。(定理证毕)。

推论 4: 赋范线性空间中的子集 A 是 W - 紧的 $\Leftrightarrow$ A 是 W - 可数紧的。

证: 设 X 是赋范线性空间,$\tilde{X}$ 为 X 的完备化空间,$A \subset X$ 是 X 的 W - 可数紧集 $\Rightarrow A$ 为 $\tilde{X}$ 的 W - 紧集 $\Rightarrow A$ 为 X 中的 W - 紧集。

定理 5: 设 X 为可度量的局部凸空间,则 X 中的集 A 是 W - 紧的 $\Leftrightarrow A$ 是 W - 可数紧的 $\Leftrightarrow A$ 是 W - 序列紧的。

证: 由定理 2 知,W - 可数紧 $\Leftrightarrow W$ - 序列紧。故只需证 W 序列紧 $\Rightarrow W$ - 紧。设 $A \subset X$,且 $\forall x \in^{*} A$,往证存在 $x_0 \in A$ 使 $x \simeq x_0(w)$。因 $\hat{A}_n$ 作为 X_n 的子集是 W - 列紧的,故为 W - 紧的。又由于 $x \in^{*} A \Rightarrow x + {}^{*}M_n \in^{*} \hat{A}_n$,于是,可找 $x_n \in A$ 使 $\forall f \in X_n'$,$f(x) \simeq f(x_n)$。而 $\{x_n\} \subset A$,又 A 是 W - 列紧的,故可找 $x_0 \in A$ 及 $\{x_n\}$ 的子列 x_{n_k} 使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \overset{w}{=} x_0$。我们有 $x \simeq x_0(w)$。事实上,$\forall f \in X'$,由于 $\{V_n\}$ 是 - 邻域基,故可找 n_0 使 $V = \{x \quad f(x) \quad < 1\} \supset V_n, n \geq n_0$,于是 $f \in X_n'$,对 $n \geq n_0$ 成立。因而有:

$$f(x) \simeq f(x_n) \quad (n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \simeq f\left(x_{n_k}\right) \quad (n_k \geq n_0)$$

但 $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$ 故有

$$f(x) \simeq f(x_0) \quad (\text{证毕})$$

参考文献

1 Luxemburg W A T. A general theory of monads. In: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability, New York, 1969

2 Robinson A. Nonstandard Analysis. North- Holland, Amcterdam, 1974

3 冯汉桥等译. 应用非标准分析. 陕西师范大学出版社

4 Helmut H Schaefer. Topological Vector Spaces. Springer- Verlag New York lfeidelberg Berlin

5 Richard Hoimes. Geometric Functional Applications. Springer - Verlag New York 1975

(责任编辑 潘生)