

# 磁悬浮列车系统轨道动力学分析与试验研究\*

谢云德 常文森 尹力明

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

**摘要** 本文建立了磁悬浮列车系统轨道动力学方程组,讨论了轨道结构参数对弹性轨道变形、极限速度及模态的影响,并结合KDⅢ车的试验结果作出分析。

**关键词** 磁悬浮列车, 轨道动力学, 结构分析

**分类号** O347

## Dynamics Analysis and Test Research of Track of Electromagnetic Suspension Vehicle System

Xie Yunde Chang Wensen Yin Liming

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** This paper establishes dynamics equation groups about Electromagnetic Suspension Vehicle system of track, and discusses track structure parameters influence upon deflection, stress, modal and critical velocity of elastic track, then some results according to KDⅢ Vehicle are given.

**Key words** electromagnetic suspension vehicle, track dynamics, structure analysis

磁悬浮系统为有源悬挂系统,磁悬浮轨道作为系统中的重要一环,对列车系统的造价、运行的稳定性、舒适性及运行的速度有直接影响,为了分析轨道对车体的影响,有必要建立轨道动力学模型,进行分析研究,以避免试验的盲目性,从而提高效率、降低研究成本。

### 1 轨道梁的动力学方程组

轨道模型如图1所示。轨道结构描述为钢轨—轨枕—道床—路基的连续弹性离散点支承基础上的无限长欧拉梁模型,各支承点以轨枕间距 $l$ , 隔开,  $m_r = \rho A$ 、 $M$ , 分别为钢轨

\* 1997年5月23日收稿

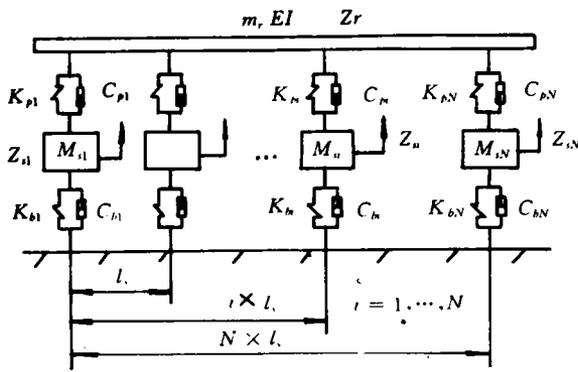


图1 轨道控型

单位长度质量、轨枕质量,  $K_p, K_b$  和  $C_p, C_b$  分别为轨下胶垫、道床的刚度与阻尼,  $Z_r, Z_i$  分别为钢轨、轨枕的振动位移变量,  $EI$  为钢轨抗弯刚度。

对任意闭区间  $[a, b]$ , 系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_a^b \rho A \left( \frac{\partial Z_r}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_D M_{si} \dot{Z}_{si}^2 \quad (1)$$

势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_a^b EI \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K_{pi} [Z_{si} - Z_r(x_i, t)]^2 + \frac{1}{2} \sum_D K_{bi} Z_{si}^2 \quad (2)$$

耗散能为

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_D C_{pi} [\dot{Z}_r(x_i, t) - \dot{Z}_{si}]^2 + \frac{1}{2} \sum_D C_{bi} \dot{Z}_{si}^2 \quad (3)$$

系统的 Lagrange 函数为  $L = T - V$

由第二类 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = Q \quad (4)$$

由于  $[a, b]$  的任意性, 有

$$\rho A \frac{\partial^2 Z_r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 Z_r}{\partial x^2} \right) + \sum_{i=1}^N K_{pi} [Z_r - Z_{si}] \delta(x, x_i) + \sum_{i=1}^N C_{pi} [\dot{Z}_r - \dot{Z}_{si}] \delta(x, x_i) = p(x, x_i)$$

$$M_{si} \ddot{Z}_{si} + C_{pi} [\dot{Z}_{si} - \dot{Z}_r(x_i, t)] + K_{pi} [Z_{si} - Z_r(x_i, t)] + C_{bi} \dot{Z}_{si} + K_{bi} Z_{si} = 0 \quad (5)$$

$p(x, t)$  为载荷分布函数, 区域  $D$  为轨道梁上铺有轨枕的区域, 轨枕数为  $N$ , 为便于计算, 采用了有限元法, 以弹性支承点为节点把连续梁离散化, 得轨道动力学方程为

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} &= \{R\} \\ [M_s] \{\ddot{Z}_s\} + [C_s] \{\dot{Z}_s\} + [K_s] \{Z_s\} &= \{R_s\} \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $\{q\}, \{Z_s\}$  分别为梁的广义坐标、轨枕位移向量,  $[M], [C], [K], \{R\}$  分别为梁的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵及载荷向量;  $[M_s], [C_s], [K_s], \{R_s\}$  分别为轨枕的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵及载荷向量矩阵。

可见,轨道、道床、路基之间通过弹簧、阻尼系统发生相互作用,由于运行的车辆对轨道来说相当于一个分布载荷,因而车辆—轨道相互作用的动力学方程也容易建立起来。

## 2 轨道结构参数的影响

为了简化问题,工程上常采用模态分析法,仅考虑前几阶低频对系统的影响,梁自由振动的 Euler—Bemoulli 动力学方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b \frac{\partial w}{\partial t} + kw = 0 \quad (7)$$

式中,  $T$  为预压力,  $k, b$  分别为梁的等效弹性系数、阻尼系数:

振动的固有频率为

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (8)$$

振型函数的通解为

$$\Psi_i(x) = A_i \sin(\lambda_i x) + B_i \cosh(\lambda_i x) + C_i \sinh(\lambda_i x) + D_i \cosh(\lambda_i x) \quad (9)$$

式中,  $\Psi_i, q_i$  分别第  $i$  阶模态对应的振型函数、广义坐标。

求前几阶低频宜采用子空间迭代法,当跨中作用有外载时,梁上任意截面的弯矩可由节点上的挠度及转角唯一确定。

梁振动的广义坐标动力学方程为

$$\ddot{q}_n + 2\eta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = f_n, f_n = \int_0^1 \Psi_n(x) p(x, t) dx \quad (10)$$

式中,  $\Psi_n, f_n, \eta_n$  分别为对应第  $n$  阶模态的振型及广义力、等效阻尼系数。

当常载荷以恒速  $v$  移动时,  $p(x, t) = P \cdot \delta(x - x_0 - v \cdot t)$ , 故  $f_n(t) = P \cdot \Psi_n(x_0 + v \cdot T)$

由于模态振型函数的基函数为

$$\{\sin \lambda_n x, \cos \lambda_n x, \sinh \lambda_n x, \cosh \lambda_n x\}$$

故最大动态放大因子为

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi_n^2)^2 + 4\xi_n^2 \eta_n^2}}, \xi_n = \frac{\lambda_n v}{\omega_n}$$

$\eta_n \ll 1$  为一小数,故当  $\xi_n \rightarrow 1$  时,有  $\beta_n \rightarrow \infty$ , 即极限速度为

$$v_{cr} = \frac{\omega_n}{\lambda_n} = \lambda_1 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (11)$$

## 3 单铁加载试验中支座梁的挠性对电磁铁的影响,静态稳定性分析

为了简化问题的分析,假定在平衡位置附近,电磁力的变化与气隙、控制电压有简单的线性关系,认为电磁铁的大的电感被电流环完全抵消,电流环可以近似认为是一个比例环节,虽然轨道变形的高频干扰能被气隙完全吸收,但对于由于梁的挠性而产生的长周期干扰,由于电磁铁本身具有有限的低频刚度,轨道和电磁铁的频率接近,容易引起系统共振,如何衰减这些振动而又保持一定的低频刚度要在控制策略上采取措施。

简化系统的动力学方程为:

$$m\Delta\ddot{z} = P_x\Delta s - P_I\Delta I + \Delta f_d$$

$$\Delta u = R_I\Delta I = K_a\Delta\ddot{z} + K_p\Delta s + K_v\Delta\dot{z} + \Delta\dot{u} \quad (12)$$

$$\Delta z = \Delta s + \Delta h$$

$$\Delta\dot{h} + 2\xi\omega_0\Delta\dot{h} + \omega_0^2\Delta h = \Phi^2\Delta P \quad (13)$$

$$\Delta P = -m\Delta\ddot{z}$$

式中,  $P_x, P_I, K_a, K_p, K_v, \Phi, \xi, \omega_0$  分别为力对间隙、电流的刚度系数, 加速度、位置、速度反馈系数, 梁的模式系数、轨道结构阻尼系数及结构频率。

上述方程又可以化为:

$$\Delta\ddot{z} + 2\eta_s\omega_s\Delta\dot{s} + \omega_s^2\Delta s = \Delta\hat{f}_d \quad (14)$$

$$\Delta z = \frac{(2 \cdot \eta_s\omega_s + \omega_s^2)\Delta h + \Delta\hat{f}_d}{s^2 + 2 \cdot \eta_s\omega_s + \omega_s^2}$$

$$\Delta s = \Delta z - \Delta h = \frac{-s^2\Delta h + \Delta\hat{f}_d}{s^2 + 2 \cdot \eta_s\omega_s + \omega_s^2} \quad (15)$$

式中  $\omega_s$  为悬浮的系统的带宽, 带宽愈窄, 系统对轨道干扰的衰减愈大, 即轨道的不平直误差对乘坐的影响愈小, 而频带与悬浮刚度、列车质量、控制反馈等因素有关。特别应指出的是, 加速度反馈系数等效于质量的作用, 当系统刚度、列车质量都已确定的情况下, 通过改变反馈系数来改变系统频带是一种较易实现的办法。

### (1) 负载变化的影响

在静态悬浮时,  $\Delta f_d = \Delta mg$  引起的静差为  $\Delta s = \Delta mg/\omega_s^2$ , 可以看出, 当系统刚度不够大时, 负载变化引起的气隙变化增大后, 将影响系统的承载能力, 从而影响系统可靠性。

### (2) 系统频带与安全性

轨道干扰引起的气隙变化的幅度为

$$|\Delta s| = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\eta_s^2 \frac{\omega_s^2}{\omega^2}}} \cdot |\Delta h| \quad (16)$$

系统频带窄, 虽然抗外力干扰能力强, 但在列车高速运行时, 两桥墩之间的变形频率可达十几赫兹, 这就出现了  $\omega \gg \omega_s$ , 从而  $|\Delta s| \rightarrow |\Delta h|$ , 即轨道变形与间隙变化量大小接近, 这就意味着轨道变形基本上为间隙的变化所吸收, 而乘客感受不到轨道变形的影响, 但是, 当轨道刚度很低或由于某种原因使局部变形过大时, 就会出现电磁铁与轨道相互碰撞, 从而影响列车运行的安全性。

### (3) 静态悬浮稳定性

仅考虑轨道弯曲变形的一阶频率, 轨道振动方程为

$$\Delta\dot{h} + 2\eta_0\omega_0\Delta\dot{h} + \omega_0^2\Delta h = \Phi^2\Delta P, \quad (17)$$

式中  $\eta_0, \omega_0, \Phi$  分别为轨道阻尼、固有频率及模态。

取  $x = [\Delta\dot{z}, \Delta z, \Delta\dot{h}, \Delta h]^T \in R^{4 \times 1}$  为状态变量, 有

$$\dot{x} = A \cdot x + F_G$$

其中

$$\begin{bmatrix} -2\eta_s\omega_s & -\omega_s^2 & 2\eta_s\omega_s & \omega_s^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2m\Phi^2\eta_s\omega_s & -m\Phi^2\omega_s^2 & -2\eta_0\omega_0 + 2m\Phi^2\eta_s\omega_s & -\omega_0^2 + m\Phi^2\omega_s^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$F_G = [\Delta\hat{f}_d \quad 0 \quad -m\Phi^2\Delta\hat{f}_d \quad 0]^T$$

从上面的系统矩阵可以知道,由于轨道模态  $\Phi$  的影响使得轨道、电磁铁发生耦合,当  $m\Phi^2$  较小时,系统的特征方程近似为

$$a(s) = (s^2 + 2\eta_s\omega_s s + \omega_s^2)[s^2 + 2(\eta_0\omega_0 - m\Phi^2\eta_s\omega_s)s + (\omega_0^2 - m\Phi^2\omega_s^2)] \quad (19)$$

系统稳定的充要条件为

$$\eta_0 > m\Phi^2\eta_s \frac{\omega_s}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 > m\Phi^2\omega_s^2 \quad (20)$$

这表明在一定条件下,轨道的弹性变形可能使系统产生不稳定的自激振荡,原因在于轨道的阻尼太小、刚度太低。

虽然电磁铁与轨道的独立振动都是稳定的,但是一旦发生耦合,系统仍然可能出现不稳定振动。 $m\Phi^2$  表示车轨质量比,可见,增大轨道的阻尼,减少车轨质量比,都有利于提高系统稳定性。然而要增大轨道阻尼,必定会使轨道结构复杂化;减少车轨质量比,就得增加轨道质量,提高轨道造价,为了提高行车的安全性,又要求轨道有一定的平直度,从而增加轨道加工成本。可见,列车的稳定性、安全性与系统的造价之间存在非常突出的矛盾,因而系统设计及调试就成为重要的环节。

#### 4 轨道结构参数的设计与试验结果

10m 长某型磁悬浮列车试验线单轨结构示意图如图 2 所示。

当跨长分别为 1.2m、1.6m、3.2m 时,分别给出轨道梁的模态振型曲线、频率及极限速度。在系统运行调试过程中,静态悬浮时曾在 68Hz 左右发生过车轨共振现象,控制系统的频率大约为 15Hz,在以后悬浮运行中没有发生谐振现象。用加速度频谱仪测试出系统的频率大约为 72Hz。

从表 1 中可以看出,当跨度为 3.2m 时,轨道振动的频率接近 15Hz,与控制系统的频率非常接近,此时系统的调试不易稳定,而当跨度为 1.2m 时,由于增加了支承的数目,成本提高,另外转向架的调试空间也减少,当跨度为 1.6m 时,轨道的固有频率与频率相差 4 至 5 倍,不易引起车轨共振现象。

表 1

跨距(m)	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)	$v_{cr}$ (m/s)
1.2	123.3	128.3	143.4	165.7	118.12
1.6	69.47	74.68	88.88	108.4	88.68
3.2	17.39	22.27	32.54	69.47	44.37

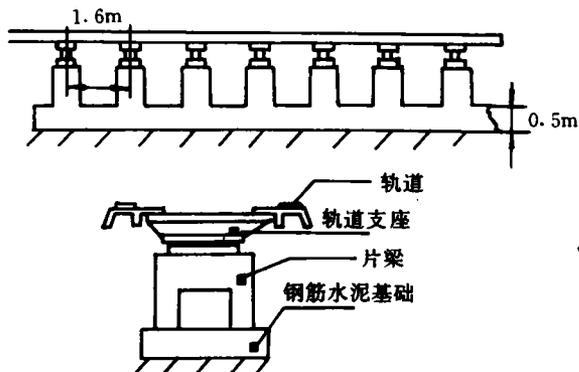


图2 单轨结构示意图

## 5 结论

综上所述,本文建立了轨道梁有限单元的动力学方程组,对轨道结构参数与频率、振型、极限速度之间的关系作了初步探讨,分析了车轨耦合系统发生自激振动的原因,并对单轨加载试验过程中出现的自激振荡现象作出合理解释,对某型磁悬浮列车试验轨给出了与频谱仪测试结果吻合的有限元计算的结果。

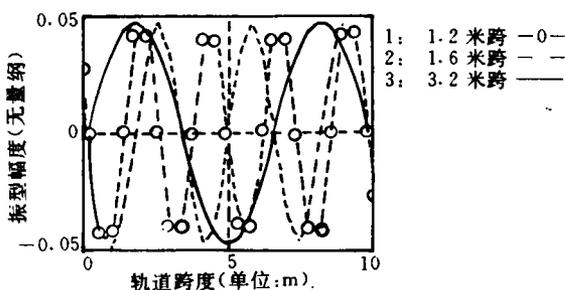


图3

## 参 考 文 献

- 1 尹力明,谢云德,陈顺良. 单磁转向架的试验研究. 机车电传动,1996,(6)
- 2 谢云德,常文森. 电磁型(EMS)磁浮列车系统铅垂方向的建模与仿真. 铁道学报,1996,(4)
- 3 Burchard Ripke et al. High Frequency Vehicle-Track Interaction in Consideration of Nonlinear Contact Mechanics. The Inter. Conf. on Speedup Technology for Railway and Maglev Vehicles,1993,2

(责任编辑 张 静)