

垂直着月轨道的特性分析及其近似解*

任 萱

陈建祥

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073) (北京系统工程研究所 北京 100101)

摘 要 本文采用圆锥曲线拼接方法,建立了垂直着月轨道的数学模型,给出了垂直着月轨道运动特性的简明分析结果。在适当近似后,获得了垂直着月轨道的解析解,为初步轨道设计提供了实用的工程方法。

关键词 月球探测,垂直着月轨道,圆锥曲线拼接法

分类号 V475

Characteristics and Approximate Solutions of Normal Impact Transfer Trajectory to the Moon

Ren Xuan

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Chen Jianxiang

(Beijing Institute of System Engineering, Beijing, 100101)

Abstract A patched-conic technique is used to formulate the mathematical model and to make an explicit analysis of the normal-impact transfer trajectory to the moon. Some approximations are required in order to obtain the analytical solutions of the normal-impact transfer trajectory to the moon. It is a practical engineering method for preliminary trajectory designing.

Key words moon exploration, normal-impact transfer trajectory, patched-conic technique

从低高度地球停泊轨道上发射一直接命中月球的探测器,在不计月球自转的假设下,若探测器垂直落向月面,则称此探测器的飞行轨道为垂直着月轨道。本文研究垂直着月

* 1996年11月10日收稿

轨道的特性及其初步设计方法。

在月球探测器的飞行轨道的初步设计中，通常是引入月球影响球概念，采用圆锥曲线拼接方法^[1,2]，将飞行轨道简化为地心轨道段与月心轨道段，这两段轨道在影响球边界上经适当拼接后形成满足要求的飞行轨道。在文献 [3] 中作者采用圆锥曲线拼接方法，通过数值分析研究了月球卫星轨道的特性。本文在此基础上，引入适当近似后获得了垂直着月轨道高精度的近似解析解。本文的结果简化了垂直着月轨道特性的分析，并为初步轨道设计提供了一种简明的工程方法。

1 坐标系及其转换关系

按照圆锥曲线拼接方法的假设，探测器在 t_0 时刻从停泊轨道上出发，以相对于地心的矢径 R_0 和速度 V_0 的初始状态开始地心轨道段的飞行，在此段轨道上只受与距离平方成反比的地心引力作用，探测器在 R_0 和 V_0 决定的平面内作二体运动。若在 t_1 时刻到达以月心为原点，半径为 r_1 的月球影响球上的某点，此点称为拼接点 1，探测器通过 1 点后进入月球影响球，开始月心轨道段飞行，在此段轨道上只受与距离平方成反比的月心引力作用，直到命中月面。

探测器在 1 点相对于地心的矢径为 R_1 ，速度为 V_1 ，相对于月心的矢径为 r_1 ，相对于围绕地球公转的月心的速度为 v_1 ，为描述探测器在 1 点的运动状态，引入下列坐标系。

1.1 地心静止坐标系 O_E -XYZ

在探测器到达 1 点的 t_1 时刻，以地心 O_E 为原点，以过地心 O_E 指向月心 O_L 的矢径为 X 轴，在月球绕地球公转的平面（白道平面）内作与 X 轴垂直的 Y 轴， Y 轴指向月球公转运动方向为正， Z 轴由右手法则确定， O_E -XYZ 为地球静止坐标系。地心轨道段的运动平面与 XY 平面的倾角为 i_0 ，升交点节线在 XY 平面内与 X 轴的角距为 Ω_0 ，如图 1 所示， O_L -XYZ 坐标系为将 O_E -XYZ 平移到月心所得的静止坐标系。

1.2 拼接点月心位置坐标系 O_L -xyz

探测器到达 1 点时，在 O_L -XYZ 坐标系中，1 点的角位置为 ξ ， η ，如图 2 所示。

O_L -xyz 坐标系由 O_L -XYZ 绕 Z 轴旋转 $90^\circ - \xi$ 、再绕导出 x 轴旋转 η 角而得。

O_L -XYZ 与 O_L -xyz 的坐标变换关系为

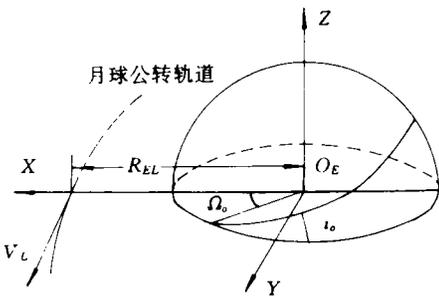


图 1 O_E -XYZ 坐标系

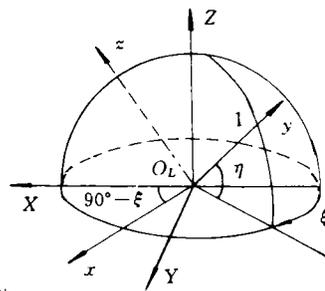


图 2 O_L -xyz 坐标系与 O_L -XYZ 坐标系

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_1(\eta)T_3(90^\circ - \xi) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$T_{PL} = T_1(\eta)T_3(90^\circ - \xi) = \begin{bmatrix} \sin\xi & \cos\xi & 0 \\ -\cos\xi\cos\eta & \sin\xi\cos\eta & \sin\eta \\ \cos\xi\sin\eta & -\sin\xi\sin\eta & \cos\eta \end{bmatrix}$$

2 垂直着月时拼接点的关系式

2.1 拼接点的位置与速度

在拼接点 1 处, 由月心 O_L 到 1 点的矢径为 r_1 , r_1 的大小为影响球半径 r_s , 方向与 y 轴一致。由地心 O_E 到月心 O_L 的矢径为 R_{EL} , R_{EL} 的大小为地月平均距离, 方向与 X 轴一致。由地心 O_E 到 1 点的矢径为 R_1 , 由于

$$R_1 = R_{EL} + r_1 \quad (2)$$

由 (1) 式可知, R_1 在 O_E -XYZ 中的三分量 X_1, Y_1, Z_1 为

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{EL} - r_s\cos\eta\cos\xi \\ r_s\cos\eta\sin\xi \\ r_s\sin\eta \end{bmatrix} \quad (3)$$

在拼接点 1 处, 探测器相对于绕地球公转的月心的速度为 v_1 , v_1 的大小由任务要求确定。由垂直着月要求可知, v_1 的方向应指向 y 轴负向。月心绕地球公转的轨道平均速度为 V_L , 其大小为常数, 方向与 Y 轴一致。探测器在 1 点相对于地心的速度为 V_1 , 由于 $V_1 = v_1 + V_L$, 由 (1) 式可知 V_1 在 O_E -XYZ 中的三分量 X_1, Y_1, Z_1 为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\cos\eta\cos\xi \\ V_L - v_1\cos\eta\sin\xi \\ -v_1\sin\eta \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2 地心轨道段动量矩守恒定理

由于地心轨道段动量矩守恒, 因而动量矩 $H = R_0 \times V_0 = R_1 \times V_1$, H 的大小为常数, 方向与 z 轴一致。 H 在 O_E -XYZ 中的三分量 H_X, H_Y, H_Z , 可利用 (1) 和 (2) 式求得为

$$\begin{bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H\sin\Omega_0\sin i_0 \\ -H\cos\Omega_0\sin i_0 \\ H\cos i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_sV_L\sin\eta \\ R_{EL}v_1\sin\eta \\ R_{EL}V_L - r_sV_L\cos\eta\cos\xi - R_{EL}v_1\cos\eta\sin\xi \end{bmatrix} \quad (5)$$

若 t_0 时刻探测器速度与当地地球水平线的夹角为 Θ_0 , 则 $H = R_0V_0\cos\Theta_0$, 因探测器在 t_0 时

刻的第二宇宙速度为 V_P , 而地球引力常数为 μ_E , 故有 $V_P = \sqrt{\frac{2\mu_E}{R_0}}$, 因而

$$H = \sqrt{2\mu_ER_0} \left(\frac{V_0}{V_P}\right) \cos\Theta_0 \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式后有

$$\begin{cases} \sqrt{2\mu_E R_0} \left(\frac{V_0}{V_P}\right) \cos\Theta_0 \sin i_0 \sin\Omega_0 + r_s V_L \sin\eta = 0 \\ \sqrt{2\mu_E R_0} \left(\frac{V_0}{V_P}\right) \cos\Theta_0 \sin i_0 \cos\Omega_0 + R_{EL} v_1 \sin\eta = 0 \\ \sqrt{2\mu_E R_0} \left(\frac{V_0}{V_P}\right) \cos\Theta_0 \cos i_0 + r_s V_L \cos\eta \cos\xi + R_{EL} v_1 \cos\eta \sin\xi - R_{EL} V_L = 0 \end{cases} \quad (7)$$

2.3 地心轨道段机械能守恒定理

由于地心轨道段机械能守恒，则有，

$$v_1^2 + V_L^2 - 2v_1 V_L \sin\xi \cos\eta - \frac{2\mu_E}{R_{EL} \sqrt{1 + \left(\frac{r_s}{R_{EL}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_s}{R_{EL}}\right) \cos\eta \cos\xi}} - \frac{2\mu_E}{R_0} \left[\left(\frac{V_0}{V_P}\right)^2 - 1\right] = 0 \quad (8)$$

在(7)式中由于垂直着月轨道的 Ω_0 将受到限制，因而可先消去 Ω_0 ，并令

$$\alpha = \sqrt{2\mu_E R_0} \frac{\cos\Theta_0}{R_{EL} V_L} \quad \beta = \frac{r_s}{R_{EL}} \quad \chi = \frac{v_1}{V_L} \quad (9)$$

则有

$$\begin{cases} (\beta^2 + \chi^2) \sin^2\eta = \left(\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P}\right)^2 \\ \cos\eta (\beta \cos\xi + \chi \sin\xi) = 1 - \alpha \cos i_0 \frac{V_0}{V_P} \\ \chi^2 - 2\chi \sin\xi \cos\eta + 1 - \frac{2}{\sqrt{1 - 2\beta \cos\eta \cos\xi + \beta^2}} = \left(\frac{V_P}{V_L}\right)^2 \left[\left(\frac{V_0}{V_P}\right)^2 - 1\right] \end{cases} \quad (10)$$

在(10)式的三个方程中，变量为 R_0 , V_0 , Θ_0 , i_0 , ξ , η , χ 共七个，给定其中四个，则可由上式解得其余三个，然后由(7)式的前两式解出 Ω_0 。

3 垂直着月时拼接点处运动特性分析

若已知 t_0 时刻探测器地心轨道的初始参数为 R_0 , V_0 , Θ_0 , i_0 , Ω_0 ，并在讨论中作如下假设：

考虑到探测器的速度 V_0 既要保证探测器能到达月球影响球，又不使所需的能量过大，因而假设地心轨道为椭圆轨道，故有 $0.9915 \leq (V_0/V_P) \leq 1$ 。

考虑到探测器由低高度地球停泊轨道出发，故假定在 t_0 时刻地心距满足 $R_0 < (R_{EL} V_L/V_0)$ 。

考虑到为减轻探测器在月面上降落时着陆制动发动机的负担，假定要求在月面上自由降落时的速度不超过 3km/s ，由能量守恒定理可知，在拼接点探测器相对于月球速度的上界 χ_H 为： $\chi_H = 1.876$ 。

3.1 拼接点的 ξ , η , χ 的限制

由(10)式的第一式和 $-90^\circ \leq \eta \leq 90^\circ$ ，和在(10)式第二式中令

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\chi}\right) \quad (11)$$

由于 $\chi > 0$, $\beta > 0$, 因而 $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$. 将 (11) 式代入 (10) 式的第二式则有

$$\sin(\xi + \psi) = \frac{1 - \alpha \cos i_0 \frac{V_0}{V_P}}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2 - (\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P})^2}} \quad (12)$$

上式有解的条件为

$$\chi \geq \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha \frac{V_0}{V_P})^2 - 2\alpha \cos i_0 \frac{V_0}{V_P}}$$

由于 $0.9915 \leq (V_0/V_P) \leq 1$, $-1 \leq (V_0 \cos i_0 / V_P) \leq 1$, 因而 χ 的下界最小值 χ_L 为

$$\chi_L = \sqrt{1 - \beta^2 - 2\alpha + (0.9915\alpha)^2} \quad (13)$$

由此可得在拼接点 χ 的变化范围内

$$\chi_L \leq \chi \leq \chi_H \quad (14)$$

由上式及 (11) 式第一式可知 $|\eta|$ 上界的最大值 $|\eta|_H$ 为

$$|\eta|_H = \sin^{-1} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \chi_L^2}} \quad (15)$$

由此可得在拼接点 $|\eta|$ 的变化范围为

$$0 \leq |\eta| \leq |\eta|_H \quad (16)$$

由 (14) 式及 (11) 式可知 ψ 的上界最大值 ψ_H 和下界最小值 ψ_L 为

$$\psi_H = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\chi_L} \right) \quad \psi_L = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\chi_H} \right)$$

由 (12) 式可知 $0 \leq \xi + \psi \leq 90^\circ$, 而 $\sin(\xi + \psi)$ 的下界最小值为 $[\sin(\xi + \psi)]_L = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{\beta^2 + \chi_H^2}}$,

因而 ξ 的上界最大值 ξ_H 和下界最小值 ξ_L 为

$$\xi_L = \sin^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{\sqrt{\beta^2 + \chi_H^2}} \right) - \psi_H \quad \xi_H = 180^\circ - \sin^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{\sqrt{\beta^2 + \chi_H^2}} \right) - \psi_L$$

在拼接点 ξ 的变化范围为

$$\xi_L \leq \xi \leq \xi_H \quad (17)$$

3.2 Ω_0 的限制

由 (7) 式第一和第二式可知: $\sin \Omega_0 = -\frac{r_s}{R_{EL}} \frac{\sin \eta}{\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P}}$, $\cos \Omega_0 = -\frac{v_1}{V_L} \frac{\sin \eta}{\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P}}$, 由以

上两式可得

$$\Omega_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\chi} \right) \quad (18)$$

其中 Ω_0 为第一和第三象限角。当 $\eta \leq 0$ 时, Ω_0 为一象限角; 当 $\eta \geq 0$ 时, Ω_0 为三象限角。

3.3 椭圆地心轨道上升段到达拼接点的分析

椭圆地心轨道到达拼接点的地心矢径为 R_1 , 相对于地心的速度为 V_1 , 当 $R_1 \cdot V_1 \geq 0$ 为上升段到达, 当 $R_1 \cdot V_1 \leq 0$ 为下降段到达。

由 (3) 式和 (4) 式可知: $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{V}_1 = R_{EL}v_1 \cos \eta \cos \xi + r_s V_L \cos \eta \sin \xi - r_s v_1$

将 (9) 式和 (11) 式代入, 则 $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{V}_1 \geq 0$ 等价于 $\cos(\xi - \psi) \geq \frac{\beta \chi}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2 \cos \eta}}$, 即

$$\xi \leq \cos^{-1} \frac{\beta \chi}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2 \cos \eta}} + \tan^{-1} \frac{\beta}{\chi} \quad (19)$$

上式右端的数值在 ξ_1 与 ξ_2 之间, 其中

$$\xi_1 = \cos^{-1} \frac{\beta \chi_H}{\sqrt{\beta^2 + \chi_H^2 \cos \eta_H}} + \tan^{-1} \frac{\beta}{\chi_H} \quad (20)$$

$$\xi_2 = \cos^{-1} \frac{\beta \chi_L}{\sqrt{\beta^2 + \chi_L^2 \cos \eta_L}} + \tan^{-1} \frac{\beta}{\chi_L} \quad (21)$$

因此, $\xi \leq \xi_1$ 时为上升段到达, $\xi > \xi_2$ 时为下降段到达, $\xi_1 < \xi \leq \xi_2$ 时由 (19) 式判断是上升段或下降段到达。

3.4 举例

对于 $R_0 = 6578 \text{ km}$, $\Theta_0 = 0$ 的椭圆地心轨道, 到达拼接点时的特性, 可由 (14)、(16)、(17)、(18)、(20)、(21) 式给出其数值。在计算中取 $R_{EL} = 384400 \text{ km}$, $r_s = 66200 \text{ km}$, $V_L = 1.0183 \text{ km/s}$, $\mu_E = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ 。计算结果为

$$0.7962 \leq \chi \leq 1.8063 \quad 0 \leq |\eta| \leq 11.75^\circ \quad 14.48^\circ \leq \xi \leq 147.86^\circ$$

$$5.45^\circ \leq \Omega_0 \leq 12.21^\circ \quad \text{或} \quad 189.77^\circ \leq \Omega_0 \leq 192.21^\circ$$

$\xi \leq 85.36^\circ$ 时为上升段到达, $\xi > 92.52^\circ$ 时为下降段到达。

上述结果表明, 拼接点位置只能在白道平面附近, 并位于影响球西半部。地心轨道的节线靠近地月连线, Ω_0 的变化范围只有 6.76 。当拼接点位于影响球西半球朝向地球一面 (除靠近边缘的 5° 范围外) 时为地心椭圆轨道上升段到达, 在其边缘 5° 范围内有可能下降段到达。

4 拼接点参数的近似计算

4.1 近似计算公式

当已知 t_0 时刻地心轨道段参数 R_0 , V_0 , Θ_0 , i_0 , 可由 (10) 式求解 χ , ξ , η 。(10) 式为非线性代数方程组, 一般要用数值方法求解。但在作出适当近似后, 可求出其近似解析解。

注意到 (10) 式第三式中的 $[1 + \beta^2 - 2\beta \cos \eta \cos \xi]^{-\frac{1}{2}}$ 项, 由于 $(\beta^2 - 2\beta \cos \eta \cos \xi) < 1$, 将此项作 Taylor 展开, 并保留到 β^2 项, 同时将 $(\cos \eta \cos \xi)^2$ 取其平均值为 0.5 , 则有

$$[1 + \beta^2 - 2\beta \cos \eta \cos \xi]^{-\frac{1}{2}} \approx (1 + 0.25\beta^2) + 2\beta \cos \eta \cos \xi \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (10) 式第三式中则有

$$\chi^2 - 2\chi \cos \eta \cos \xi - 2(1 + 0.25\beta^2) - 2\beta \cos \eta \cos \xi - \left(\frac{V_P}{V_L}\right)^2 \left[\left(\frac{V_0}{V_P}\right)^2 - 1\right] = 0$$

再注意到 (10) 式第三式可写为 $\beta \cos \eta \cos \xi = 1 - \chi \cos \eta \sin \xi - \alpha \cos i_0 \frac{V_0}{V_P}$, 则可得 χ 的近似表达式为

$$\chi = \sqrt{(3 + \frac{\beta^2}{2}) - 2\alpha\cos i_0 \frac{V_0}{V_P} + (\frac{V_P}{V_L})^2 [(\frac{V_0}{V_P})^2 - 1]} \quad (23)$$

由上式求得 χ 后, 将其代入 (10) 式第一式可求得

$$\eta = \pm \sin^{-1} \frac{\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P}}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2}} \quad (24)$$

将 (22) 式代入 (11)、(12) 式可求得

$$\xi = \sin^{-1} \left(\frac{1 - \alpha \cos i_0 \frac{V_0}{V_P}}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2 - (\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P})^2}} \right) - \tan^{-1} \frac{\beta}{\chi} \quad (25)$$

或

$$\xi = \pi - \sin^{-1} \left(\frac{1 - \alpha \cos i_0 \frac{V_0}{V_P}}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2 - (\alpha \sin i_0 \frac{V_0}{V_P})^2}} \right) - \tan^{-1} \frac{\beta}{\chi} \quad (26)$$

当椭圆地心轨道段在拼接点的速度 $Z \geq 0$ 时, (24) 式取正号, 反之为负。当 $X_1 \geq 0$ 时取 (25) 式, 反之取 (26) 式。而 X_1, Z_1 的符号与由 t_0 到 t_1 的飞行时间长短有关。

进一步, 消去 (24) 和 (25) 式中的 i_0 , 可以得到 ξ, η 的近似轨迹方程如下

$$\alpha^2 \left(\frac{V_0}{V_P} \right)^2 = \sin^2 \eta (\beta^2 + \chi^2) + [1 - \sin(\xi + \tan^{-1} \frac{\beta}{\chi}) \sqrt{(\beta^2 + \chi^2) \cos^2 \eta}]^2 \quad (27)$$

4.2 示例

对于前述椭圆地心轨道初始参数, 并取 $i_0 = 60^\circ$, 要求在上升段到达影响球, 则由近似解可求得结果如表 1 所示 (表中 η 正值对应于 Ω_0 为一象限角, η 负值对应于 Ω_0 为三象限角)。 ξ, η 的近似轨迹如图 3 所示。仿真表明, 近似解与精确解的误差不大于 4%。

表 1

V_0/V_P		0.992	0.994	0.996	0.998	1.000
χ	近似解	0.9843	1.1969	1.3775	1.5373	1.6822
	精确解	0.9708	1.1985	1.3838	1.5455	1.6913
	误差	+1.39%	-0.13%	-0.46%	-0.53%	-0.54%
η/deg	近似解	± 9.152	± 7.568	± 6.601	± 5.933	± 5.437
	精确解	± 9.276	± 7.558	± 6.571	± 5.902	± 5.408
	误差	-1.34%	+0.13%	+0.46%	+0.53%	+0.54%
ξ/deg	近似解	57.099	41.058	34.048	29.761	26.776
	精确解	58.905	40.981	33.853	29.573	26.661
	误差	-3.06%	+0.19%	+0.58%	+0.63%	+0.43%

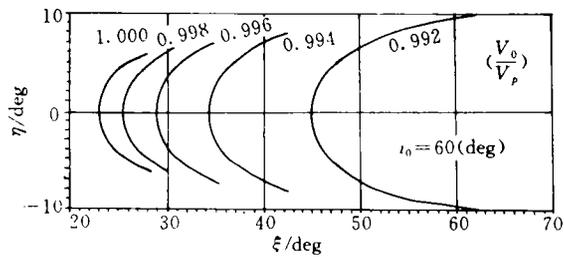


图3 ξ, η 的轨迹 (近似解)

5 结论

垂直着月轨道的初步设计问题可归结为二体轨道边值问题的求解, 这一问题要求解出在拼接点满足约束为月心距等于影响球半径且相对于月球的速度指向月心的地心轨道。本文给出了在初始点参数为 R_0, V_0, θ_0, i_0 , 在拼接点满足上述约束的椭圆地心轨道, 并得出了地心轨道到达拼接点时相对于月心的位置和速度的近似计算公式, 该公式与精确数值计算结果相比较, 误差不大于 4%, 可供初步轨道设计使用。

参 考 文 献

- 1 Richad H. Battin. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, AIAA Education Series, 1987
- 2 Roger R. Bate, etc. Fundamentals of Astrodynamics, Dover Publications, Inc. 1971
- 3 Robert H. Tolson. Geometrical Characteristics of Lunar Orbits Established form Earth-Moon Trajectories, NASA TN D-1780, April 1963

(责任编辑 张 静)