国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第6期　1997年12月　Vol. 19 No. 6

等值电路法列写线性网络的状态方程*

谢 克 彬

（国防科技大学机械电子工程与仪器系　长沙　410073）

摘　要　本文介绍一种手算时用等值电路编写线性网络状态方程的方法。优点是不必列任何方程式，尤其是可以省略消去非状态变量的复杂计算过程。提出一种用检查“量纲”的办法，核对计算是否有误，以便及时纠正。

关键词　线性网络，状态变量，状态方程，等值电路，量纲

分类号　TN702

Linear Network State Equation Written by Means of Equivalent circuit

Xie Kebin

(Department of Mechatronics Engineering and Instrumentation, NUDT, changsha, 410073)

Abstract　A method to write linear network state equation is introduced by means of equivalent circuit. One of the advantages is that it is unnecessary to write any equations, and especially the complex calculating process of the non—state variables can be omitted. A method is proposed to check the dimension so as to determine whether it has any mistakes, it there is any, it can be corrected in time.

Key words　linear network, state variable, state equation, equivalent circuit, dimension

1　一般表达式

对于由二端电阻器、二端电容器、二端电感器和独立电源所组成的线性定常网络，一般总是选取电容电压 U_C 与电感电流 i_L 作为状态变量，标准形式的方程为

$$\dot{X} = AX + BW \tag{1}$$

* 1997年9月10日修订

X 代表状态变量，$\dot{X}$ 代表$\frac{dx}{dt}$。设有 n 个状态变量，则 $\dot{X}$ 与 X 均为 n 阶列向量，矩阵 A 为 n 阶方阵，设有 m 个输入，则 W 为 m 阶列向量，矩阵 b 为 nxm 阶矩阵。

只有单个输入时（$m=1$），则 W 为一标量，b 为 n 阶列向量。

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

可将（1）式写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}w \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}w \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}w \end{aligned} \tag{2}$$

选取状态变量以后，编写状态方程的工作，就是确定 A 和 b 中诸元素 a_{11}、$a_{12}\cdots$和 b_{11}、$b_{21}\cdots$。这些元素取决于网络元件和网络图形。

2 怎样从相应的等值电路求解 A 和 b 中诸元素

在人工编写状态方程时，一般教科书上都介绍了两种方法：观察法和系统法。这两种方法，一般都要列写有关的方程式，再设法消去非状态变量。本文介绍的方法则不必列写任何方程式，尤其是可以省掉消去非状态变量的复杂计算过程。

我们研究的是线性网络，根据叠加原理，由（2）式可得

$$a_{11}=\left.\frac{\dot{x}_1}{x_1}\right|_{\substack{x_2=0\\x_3=0\\\cdots\\x_n=0\\w=0}} \qquad a_{12}=\left.\frac{\dot{x}_1}{x_2}\right|_{\substack{x_1=0\\x_3=0\\\cdots\\x_n=0\\w=0}} \tag{3}$$

以及

$$b_{11}=\left.\frac{\dot{X}_1}{w}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\\cdots\\x_n=0}} \qquad b_{12}=\left.\frac{\dot{X}_2}{w}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\\cdots\\x_n=0}} \tag{4}$$

下面，我们用具体的例子说明对这些元素的求法。

例 1　电路如图 1，试列状态方程。

解　选 $x_1=i_1$，$x_2=u_2$

求 A 中诸元素时，将输入置零。

（1）先求下标相同的元素 a_{jj}：

例如　$$a_{11}=\left.\frac{\dot{x}_1}{x_1}\right|_{x_2=0}=\frac{di_1}{dt}\frac{1}{i_1}\Big|u_2=0 \tag{5}$$

由(5)式求得相应的等值电路如图2，由此图可写出

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+i_1\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)=0$$

$$\therefore a_{11}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i_1}=-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}/L_1$$

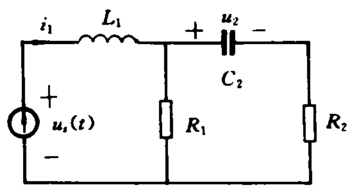

图1

实际上，求 a_{11} 时可以保持 x_1 支路不动，而将其它所有电容支路短路，所有其它电感支路开路，用类似求解一阶电路的三要素法中求时间常数 τ 的方法求得

$$a_{11}=-\frac{1}{\tau}=-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}/L_1$$

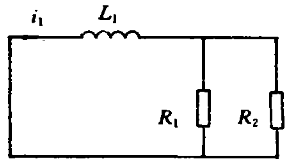

图2

同样道理，求 a_{22} 时，保持 x_2 支路不动，将 L_1 支路开路，便得到相应的等值电路如图3，所以有

$$a_{22}=-\frac{1}{C_2(R_1+R_2)}$$

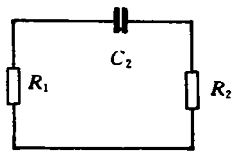

图3

所有下标相同的元素 a_{jj} 都可用这种方法求得。量纲均为 s^{-1}（$[秒]^{-1}$）。当第 j 条支路为电容器或电感器时，文字表达式为 $-\frac{1}{RC}$ 或 $-\frac{R}{L}$。利用这一特点，我们可以发现计算结果是否有错误，以便及时纠正。

(2) 下面求下标不同的元素 a_{jk}

由于 $$a_{12}=\frac{\dot{x}_1}{x_2}\bigg|_{x_1=0}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_2}\bigg|_{i_1=0}$$

据此作出相应的等值电路如图4。由图4得

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+u_2-\frac{R_2}{R_1+R_2}u_2=0$$

$$\therefore a_{12}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_2}=-\frac{R_1}{R_1+R_2}/L_1$$

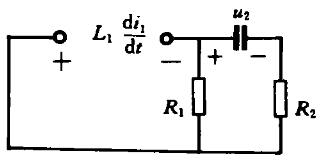

图4

求解 a_{jk} 的规律是：保持第二个下标支路 k 不动，将第一个下标支路 j 置零；如为电感器则开路，但要标出电感两端的开路电压 $L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$；如为电容器则短路，但要标出通过电容的电流 $C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$。其它电容器或电感器，均短路或开路，电阻器支路不动，即可得到其相应的等值电路。

根据这个规律求 a_{21}。保持 L_1 支路不动，将 C_2 支路短路并标出通过 C_2 的电流 $C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$，则得求解 a_{21} 的等值电路如图5。由图5写出

$$i_1=C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+\frac{C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\cdot R_2}{R_1}=C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\frac{R_1+R_2}{R_1}$$

$$\therefore a_{21}=\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i_1}=\frac{1}{C_2}\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

下面，我们研究一下 a_{jk}的量纲和表达形式。首先回想一下 a_{jj}的量纲总是[秒]$^{-1}$。形式与第一个下标支路 j 有关，如为电容器或电感器，形式是$-\frac{1}{RC}$或$-\frac{R}{L}$。而 a_{jk}的量纲，既与支路 j 又与支路 K 的性质有关；形式主要取决于第一个下标支路 j 的性质。分为四种情况，如表 1 所示。

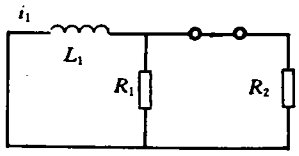

图 5

表 1

第一个下标支路 j	第二个下标支路 k	a_{jk}的形式	a_{jk}的量纲
电容器	电容器	$\pm\frac{1}{C_j}\cdot\frac{1}{R}$	s^{-1}
	电感器	$\pm\frac{1}{C_j}$或$\pm\frac{1}{C_j}\cdot\frac{R'}{R''}$	F^{-1}
电感器	电感器	$\pm\frac{1}{L_j}\cdot R$	s^{-1}
	电容器	$\pm\frac{1}{L_j}$或$\pm\frac{1}{L_j}\cdot\frac{R'}{R''}$	H^{-1}

可以看出：

（Ⅰ）无论是 a_{jj}还是 a_{jk}，在形式上都与第一个下标支路 j 的性质有关。所以，如果支路 j 为电容器或电感器，则 A 中这一行的所有元素均有因子$\frac{1}{C_j}$或$\frac{1}{L_j}$。

（Ⅱ）a_{jj}前面总冠以“－”号，而 a_{jk}前面的符号与每个状态变量所选的参考方向有关。由于参考方向是可以任意选定的，故有时冠以“＋”号，有时冠以“－”号。

（Ⅲ）无论 a_{jj}或 a_{jk}有时均可为零。

(3) 最后求元素 b_{jj}或 b_{jk}（这时应保持输入支路 w 不动）

由于

$$b_{11}=\frac{\dot{x}_1}{w}\bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_s}\bigg|_{\substack{i_1=0\\u_2=0}}$$

我们将支路 1 置零，由于支路 1 为电感器所以开路，并且标出开路电压 $L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$；同时将支路 2 置零，由于支路 2 为电容器，所以将其短路，得到求 b_{11}的等值电路如图 6，由图 6 有

$$u_s=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$\therefore b_{11}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_s}=\frac{1}{L_1}$ 类似地，由于

$$b_{21}=\frac{\dot{x}_2}{w}\bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_s}\bigg|_{\substack{i_1=0\\u_2=0}}$$

我们将支路 2 置零，由于支路 2（第一个下标支路）为电容器，所以短路，并且标出电容电流 $C_2\dfrac{du_2}{dt}$；再将支路（第二个下标支路）电感器开路，则得求 b_{21} 的电路如图 7，由图 7 有

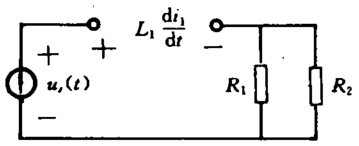

图 6

$$C_2\frac{du_2}{dt}(R_1+R_2)=0;\frac{du_2}{dt}=0$$

$$\therefore b_{21}=\frac{du_2}{dt}\frac{1}{u_s}=0$$

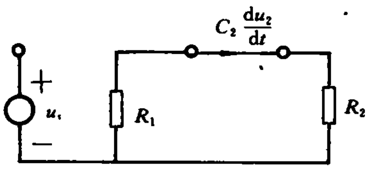

图 7

实际上，直接从原电路即可观察出 $b_{21}=0$（因为将 L_1 断开，即可看出 $C_2\dfrac{du_2}{dt}=0$）

下面，研究在一般情况下，求解 b_{jj} 与 b_{jk} 的规律。b_{jj} 与 b_{jk} 的形式与 a_{jk} 相似，也是决定于第一个下标支路 j，如为电容器或电感器，则具有因子 $\dfrac{1}{C_j}$ 或 $\dfrac{1}{L_j}$。b_{jj} 和 b_{jk} 的量纲，与第一个下标支路 j 的性质和第二个下标支路 k 的性质有关。注意：这时第二个下标支路就是输入支路 w，所以 b_{jj} 和 b_{jk} 的量纲取决于第一个下标支路 j 和输入 w 的性质，也分为四种情况，如表 2 所示。

表 2

第一个下标支路 j	输入支路 w（即第二个下标支路 k）	b_{jj} 和 b_{jk} 的形式与量纲	
电容器	电压源	$\pm\dfrac{1}{C_jR}$	$[s]^{-1}$
	电流源	$\pm\dfrac{1}{C_j}$ 或 $\pm\dfrac{1}{C_j}\cdot\dfrac{R'}{R''}$	$[F]^{-1}$
电感器	电流源	$\pm\dfrac{R}{L_j}$	$[s]^{-1}$
	电压源	$\pm\dfrac{1}{L_j}$ 或 $\pm\dfrac{1}{L_j}\cdot\dfrac{R'}{R''}$	$[H]^{-1}$

观察表 2，我们发现一个有趣的现象，将表 2 中的（输入支路 w）电压源或电流源，看成一个相应的电容器或电感器，则 b_{jj} 和 b_{jk} 的形式与量纲就与 a_{jk} 的形式与量纲具有同样的规律。因此，我们得到如下结论：无论是求 A 中诸元素还是求 b 中诸元素，在形式上，都取决于第一个下标支路 j 的性质，如为电容器或电感器，则具有因子 $\dfrac{1}{C_j}$ 或 $\dfrac{1}{L_j}$。在量纲上，如两个下标支路性质相同，都是电容器（或相应的电容器，实际上为电压源）或都是电感器（或相应的电感器，实际上为电流源），则量纲为 $[s]^{-1}$。如两个下标支路性质不同，一个为电容器，另一个为电感器，则量纲取决于第一个下标支路，如为电容器或电感器，则量纲为 F^{-1} 或 H^{-1}。

当然，b_{jj} 或 b_{jk} 有时可以为零。掌握这些特点，对检验计算结果是很有帮助的。

本例题的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}/L_1 & -\frac{R_1}{R_1+R_2}/L_1\\ R_1/C_2(R_1+R_2) & -1/C_2(R_1+R_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1}\\ 0\end{bmatrix}u_s(t)$$

为了熟悉这种方法，我们举一个例子，并注明出处，读者可以比较对照。

3 举例

例 2：电路如图 8，试列状态方程（参看参考文献 [3] $P221$：例 5.2-1）

解：选$x_1=u_1$　　$x_2=u_2$

$x_3=i_3$　　$x_4=i_4$

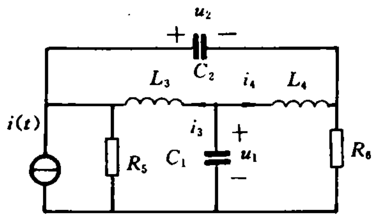

图 8

由观察　$a_{11}=0$　　$a_{22}=-\frac{1}{C_2(R_5+R_6)}$

$$a_{33}=-\frac{R_5R_6}{R_5+R_6}/L_3$$

$$a_{44}=-\frac{R_5R_6}{R_5+R_6}/L_4$$

$a_{12}=0$（$\because L_3$ 与 L_4 开路）　　$a_{13}=-\frac{1}{C_1}$（$\because L_4$ 支路开路）

$a_{14}=-\frac{1}{C_1}$（$\because L_3$ 支路开路）　　$a_{21}=0$（$\because L_3$ 与 L_4 开路）

求 a_{23}的电路如下：

$$\because i_3=C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\cdot R_6/R_5$$

$$\therefore a_{23}=\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i_3}=\frac{R_5}{C_2(R_5+R_6)}$$

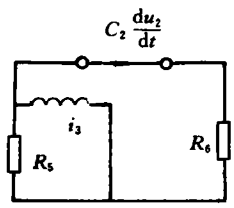

图 9

求 a_{24}的电路如下：

$$\therefore a_{24}=\frac{R_6}{C_2(R_5+R_6)}$$

求 a_{31}、a_{32}与 a_{34}的电路如下：图 11（a）、（b）与（c）.

$\because L_3\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}=u_1$　　$\therefore a_{31}=\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_1}=\frac{1}{L_3}$

$$\because L_3\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}+u_2+\frac{L_3\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}}{R_5}\cdot R_6=0$$

$$\therefore a_{32}=\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u_2}=-\frac{R_5}{L_3(R_5+R_6)}$$

$$\because L_3\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}+\left(i_4+L_3\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{R_5}\right)R_6=0$$

$$\therefore a_{34}=\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i_4}=-\frac{R_5R_6}{L_3(R_5+R_6)}$$

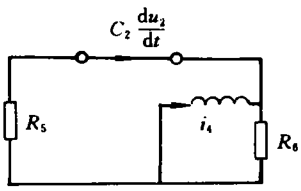

图 10

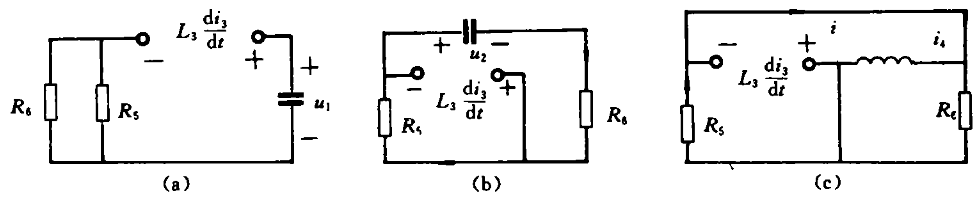

图 11

由观察知 $a_{41}=\dfrac{1}{L_4}$

求 a_{42}和 a_{43}电路如下：图 12 (a)、(b)。

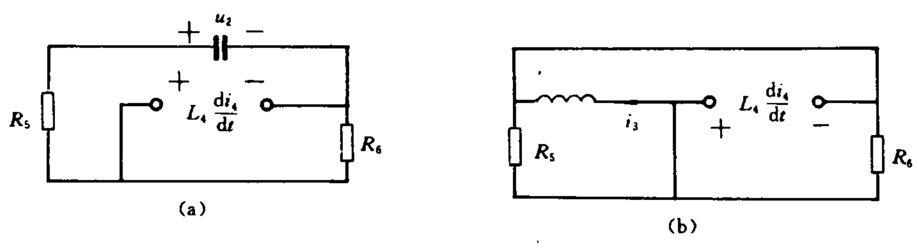

图 12

$$a_{42}=\frac{R_6}{L_4(R_5+R_6)} \qquad a_{43}=-\frac{R_5R_6}{L_4(R_5+R_6)}$$

由观察知 $b_{11}=0$（$\because L_3$ 与 L_4 支路开路）

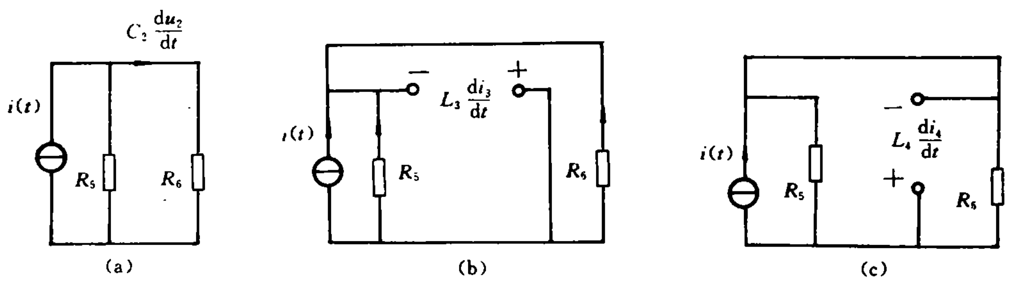

图 13

求 b_{21}、b_{31}与 b_{41}电路如下：图 13 (a)、(b) 和 (c)。

$$\because i(t)=C_2\frac{du_2}{dt}+C_2\frac{du_2}{dt}\frac{R_6}{R_5} \qquad \therefore b_{21}=\frac{du_2}{dt}\frac{1}{i(t)}=\frac{R_5}{C_2(R_5+R_6)}$$

$$\because\left(\frac{R_5R_6}{R_5+R_6}\right)i(t)=-L_3\frac{di_3}{dt} \qquad \therefore b_{31}=\frac{di_3}{dt}\frac{1}{i(t)}=-\frac{R_5R_6}{L_3(R_5+R_6)}$$

由图 (c) 知 $b_{41}=\dfrac{R_5R_6}{L_4\ (R_5+R_6)}$

状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{i}_3\\ \dot{i}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\dfrac{1}{C_1} & -\dfrac{1}{C_1}\\ 0 & -\dfrac{1}{C_2(R_5+R_6)} & \dfrac{R_5}{C_2(R_5+R_6)} & -\dfrac{R_6}{C_2(R_5+R_6)}\\ \dfrac{1}{L_3} & -\dfrac{R_5}{L_3(R_5+R_6)} & -\dfrac{R_5R_6}{(R_5+R_6)}/L_3 & -\dfrac{R_5R_6}{L3(R_5+R_6)}\\ \dfrac{1}{L_4} & \dfrac{R_6}{L_4(R_5+R_6)} & -\dfrac{R_5R_6}{L_4(R_5+R_6)} & -\dfrac{R_5R_6}{R_5+R_6}/L_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ i_3\\ i_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{R_5}{C_2(R_5+R_6)}\\ -\dfrac{R_5R_6}{L_3(R_5+R_6)}\\ -\dfrac{R_5R_6}{L_4(R_5+R_6)}\end{bmatrix}i(t)$$

由二端R、L、C元件和独立源组成的线性定常网络，一般总是选取电容电压u_C和电感电流iL为状态变量。若网络不存在仅由电容组成的回路，也不存在仅由电感组成的割集，我们总可以找到一个固有树，它包括网络的全部电容支路而不包括任一电感支路。就每一电容支路的基本割集列写电流方程，因为基本割集中只有一个树支，其余全是连支，而连支中是没有电容的，所以电流方程中，只有一项是电容电流。就每一电感支路的基本回路列写电压方程，因为基本回路中只有一个连支，其余全是树支，而树支中是没有电感的，所以电压方程中，只有一项是电感电压。这样一来在网络方程中只有一项电容电流$i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$或者只有一项电感电压$u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$，它们是状态变量$u_C$或$i_L$的一阶导数项，其余各支路的电压或支路电流都可以表示为状态变量u_C或i_L和输入w的线性组合。这样建立的状态方程为标准形式的$\dot{X}=AX+bw$，我们可用上述方法求得A和b中诸元素得到标准形式的状态方程。

参 考 文 献

[1] C. A. 狄苏尔、葛守仁。电路基本理论。林争辉主译，北京人民教育出版社，1979

[2] 陈树柏主编。网络图论及其应用。北京科学出版社，1982

[3] B. 贝卡利。网络分析与综合基础。陈大椿等译。北京人民教育出版社．1979

（责任编辑　潘　生）