

相空间有限元方法在 解二维中子输运方程中的应用*

王同权 张树发 沈永平 王尚武

(国防科技大学应用物理系 长沙 410073)

摘要 本文采用相空间有限元方法求解了柱形临界多群中子输运问题。其中对于方程中的坐标变量用分片连续线性多项式作为试探函数,对于方程中的角度变量用分片连续双线性多项式作为试探函数。整个求解空间区域和角度区域分别采用三角形和矩形单元划分,然后利用迦辽金方法得到一个以网格点处角通量为未知数的线性联立代数方程组,方程组中的系数矩阵的存储采用了压缩存储技术。最后用高斯消元法解此有限元方程组,表明相空间有限元方法计算收敛性较好、计算精度高。

关键词 相空间有限元方法,中子输运,试探函数,迦辽金方法

分类号 0242.21, TL329

Finite Element Method Applied to the Two-Dimensional Neutron Transport Equation

Wang Tongquan Zhang Shufa Shen Yongping Wang Shangwu

(Department of Applied Physics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The phase-space finite element method is applied to the multigroup neutron transport equation in cylindrical critical systems. The continuous piecewise polynomial trial functions are trilinear in the space variables and bilinear in the angle variables. Elements are triangular in the spatial domain and rectangular in the angle domain. Galerkin method is used to derive a set of simultaneous algebraic equations. The coefficient matrices of the algebraic equations are compressed and stored. The resulting finite element equations are solved by gaussian elimination method. Numerical results are compared to those obtained by SN calculations. FEM was observed to yield a higher order of convergence and accuracy.

Key words phase-space FEM, neutron transport, trial functions, Galerkin method

* 1997年6月10日收稿

有限元方法是在结构分析和变分法的基础上发展起来的一种数值计算方法。至今,有限元方法在材料力学等领域的应用已经相当广泛和成熟。由于这种方法的应用灵活性以及精度较高的特点,所以很快地在其它领域也得到推广使用,在电磁场、流体力学等领域中的应用也屡见不鲜。而有限元法在反应堆数值计算中的应用在70年代初才起步。起初利用有限元方法解一维单能定态中子输运问题,并且显示出了有限元方法的优越性,随后有限元方法开始应用于求解二维定态中子输运问题,出现了相空间有限元方法^[1,2],但相空间有限元方法处理问题相对复杂并且计算量较大。本文试探利用相空间有限元方法解二维非定态中子输运问题。

1 二维非定常多群中子输运方程

在二维 (r, z) 柱几何下考虑非定态中子输运问题,并假设不含独立外中子源,输运方程的形式为:

$$\left(\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial z} + \sqrt{1 - \eta^2} (\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}) + \sum_g \right) \Psi_g = Q_s + Q_f \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta &= \cos\varphi \\ Q_s &= \sum_{g'=1}^{IGM} \sum_{g \rightarrow g'} (r\Phi_{g'}(r, t)) \\ Q_f &= \chi_g \sum_{g'=1}^{IGM} V_{g'} \sum_{f g'} (r\Phi_{g'}(r, t)) \\ \Phi_{g'} &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \Psi_{g'}(r, \Omega, t) \end{aligned} \quad (2)$$

对(1)式从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 积分,并利用菱形^[3]公式,则有:

$$(\Omega \cdot \nabla + \sum) \Psi_g = S(r, \Omega) \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_g + \frac{2}{\Delta t \cdot V_g} \\ S(r, \Omega) &= Q_s^{n+\frac{1}{2}} + Q_f^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta t \cdot V_g} \Psi_g^n(r, \Omega) \end{aligned} \quad (4)$$

2 有限元方法

近代有限元方法的积分表达式通常由两种不同的途径获得,即变分法和加权残数法,本文中的有限元积分表达式通过 Galerkin^[4]方法得到。

2.1 有限元网格划分及形状函数的确定

设所要求解的临界装置柱高为 ZM ,柱半径 RM ,则求解区域为:

$$D = \{r \in [0, RM], z \in [0, ZM/2], \eta \in [-1, 1], \varphi \in [0, \pi]\} \quad (5)$$

对坐标子区域采用三角形网格划分,引入 Jacobi 变换使每个三角形都变换为标准三角形。即两直边长度都为1的直角三角形。经过 Jacobi 变换后,三角形的三个顶点为 p_1

$(0,0), p_2(1,0), p_3(0,1)$. 原来三角形中任一点 (r,z) ,在变换后的三角形中始终有某一点 (ξ,ζ) 与之相对应,所以有:

$$\Psi(r,z) = \Psi(\xi,\zeta) \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1) \quad (6)$$

在三角形内任一点的通量可由三角形三顶点处的通量插值近似。

$$\Psi^m = d^T \tilde{\Psi}^m \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} d^T &= [1 - \zeta - \zeta \quad \zeta \quad \zeta] \\ \tilde{\Psi}^m &= [\Psi_1^m \quad \Psi_2^m \quad \Psi_3^m]^T \end{aligned} \quad (8)$$

1,2,3 分别表示三角形三顶点

同理,对角度子区域采用矩形网格划分,对 η 方向上网格点选用高斯点, ϕ 方向上的网格点选用均匀划分。同样引入 Jacobi 变换使每一矩形标准化,即映射到一个单位正方形。Jacobi 变换映射之后有:

$$\Psi(\eta,\phi) = \Psi(u,w) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1) \quad (9)$$

在矩形内任一点的通量可由矩形四顶点处的通量插值来近似。

$$\Psi^k = c^T \tilde{\Psi}^k \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} c^T &= [1 - u - w + uw \quad u - uw \quad uw \quad w - uw] \\ \tilde{\Psi}^k &= [\Psi_1^k \quad \Psi_2^k \quad \Psi_3^k \quad \Psi_4^k]^T \end{aligned} \quad (11)$$

1,2,3,4 分别表示矩形四顶点,所以 $\Psi(r,z,\eta,\phi)$ 的插值表达式为:

$$\Psi(r,z,\eta,\phi) = d_n^T C_m^T \tilde{\Psi}_{nm} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} C_m^T &= \begin{bmatrix} C_m^T & 0 & 0 \\ 0 & C_m^T & 0 \\ 0 & 0 & C_m^T \end{bmatrix} \\ C_m^T &= [1 - u - w + uw \quad u - uw \quad uw \quad w - uw] \\ d_n^T &= [1 - \xi - \zeta \quad \xi \quad \zeta] \\ \tilde{\Psi}_{nm} &= [\Psi_{11}^{nm} \quad \Psi_{12}^{nm} \quad \Psi_{13}^{nm} \quad \Psi_{14}^{nm} \quad \dots \quad \Psi_{34}^{nm}]^T \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 有限元方程

在本文中,控制微分方程为:

$$(\Omega \cdot \nabla + \sum) \Psi(\Delta, \Omega) = S(\Delta, \Omega) \quad (14)$$

由前面部分,我们已经得到求解区域内任一点角通量的近似式

$$\Psi(r,z,\eta,\phi) = d_n^T C_m^T \tilde{\Psi}_{nm} = M^T \tilde{\Psi}_{nm} \quad (15)$$

其中 $M^T = d_n^T C_m^T$,把上式代入控制微分方程中,设存在一个残数:

$$R(r,\Omega) = (\Omega \cdot \nabla + \sum) \Psi(r,\Omega) - S(r,\Omega) \quad (16)$$

由 Galerkin 方法,以 M 为权重对上式在全求解域内积分并令之为零:

$$I = \iint [M(\Omega \cdot \nabla + \sum) \Psi(r,\Omega) - MS(r,\Omega)] d\mathbf{r}d\Omega = 0 \quad (17)$$

由此可得有限元方程:

$$A\tilde{\Psi} = f \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \iint M(\Omega \cdot \nabla + \Sigma) M^T dr d\Omega \\ f &= \iint MS(r, \Omega) dr d\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

A 称为有限元刚度矩阵, f 称为载荷列阵。

3 算法与结果分析

利用编制的相空间有限元程序对文献[5]上的一个圆柱形裸的临界装置进行了检验计算, 表 1 为装置的有关参数。表 2 为计算过程中采取的参数, 中子截面采用文献[6]的 6 组常数。

表 1 临界装置的有关参数

圆柱高 $ZM(\text{cm})$	24.5872
圆柱半径 $RM(\text{cm})$	6.985
密度 (g/cm^3)	18.75
U^{235} 含量	93.9%
U^{238} 含量	6.1%

表 2 计算过程中采取下列参数

时间步长 $\Delta t(\text{ns})$	0.5
极角网格数 NM	2
方位角网格数 MM	4
半径风格数 IM	5
对称轴网格数 JM	5
收敛误差 ER	0.0001
内迭代粗误差 SE	0.1
内迭代精细误差 SER	0.00001

3.1 边界条件处理与算法

假设圆柱形装置外是真空, 则外边界面上引入自由边界条件, 即入射角通量为零。

$$\Psi(r, \Omega) = 0 \quad (r \in S, n \cdot \Omega \leq 0; n \text{ 为边界外法线方向, } S \text{ 为边界表面})$$

除了真空边界条件之外, 由于圆柱的轴对称性, 所以在圆柱轴上的网格点处角通量在方位角互补时应相等, 有柱心边界条件。由于圆柱上下两部分对称, 所以柱半高度对称平面处又有反射边界条件。

(1) 柱面边界条件: $r=RM$ 处的外边界是自由边界, 则

$$\Psi_m^{IM} = 0 \quad (m \leq MM/2) \quad (20)$$

(2) 端面边界条件: $z=ZM/2$ 处的外边界是自由边界, 则

$$\Psi_n^{IM} = 0 \quad (n \leq NM/2) \quad (21)$$

(3) 柱心边界条件:

$$\Psi_m^i = \Psi_{MM-m}^i \quad (i = 0 \text{ 且 } m \geq MM/2) \quad (22)$$

(4) 柱半高度对称平面处反射边界条件:

$$\Psi_n^j = \Psi_{NM-n+1}^j \quad (j = 0 \text{ 且 } n \leq NM/2) \quad (23)$$

在有限元方程组中附加上边界条件后, 并对刚度矩阵 A 进行部分压缩处理, 然后用

高斯消元法求解此有限元方程组,再利用时间步递推和源迭代法^[7]可以计算系统的时间常数 λ 和有效增殖因子 K_{eff} . 在计算过程中,计算开始时内迭代误差要求选用粗误差 SE,时间常数达到某一精度后,内迭代误差要求选用精细误差 SER,以此技术来节约计算时间。

3.2 结果分析

利用相空间有限元方法程序和 SN 方法程序^[7]分别对以上检验问题进行了计算,其中所用的 S2 方法与本文所用相空间有限元方法网格划分大小基本相当。

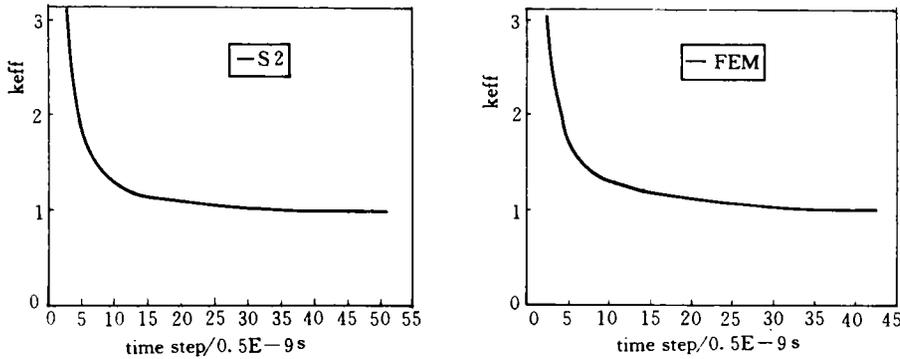


图1 K_{eff} 随时间步的收敛曲线

图1是用S2方法程序和相空间有限元方法程序计算 K_{eff} 在计算过程中的收敛曲线,S2方法通过51个时间步达到收敛,相空间有限元方法经过了43个时间步达到收敛。

表3为表征系统状态的几个主要参数的计算结果与实验值的比较。可以看出用相空间方法得出的结果较与之网格相当的S2方法略好,说明相空间有限元方法在网格较大时比SN方法有优越性。从相空间有限元法与S4方法的比较来看,结果也是有限元方法较好,并且有限元方法在每个时间步的内迭代次数比S2方法少,说明有限元方法收敛性较好。所以从以上结果可以得出以下结论,即有限元方法具有相对于SN方法有较好的收敛性和较高的精度。此外,由于有限元方法的三角网格划分,使它能比较灵活地处理复杂几何边界,能够解决一些用SN方法有困难的复杂几何边界问题。同时,由于在有限元方法中,引入的试探函数都是分片函数,所以对于非均匀介质或多介质的输运问题,只引入核参数的分片均匀近似,改变输入参数,程序照常使用。所以有限元方法在处理多介质问题或非均匀介质问题时也比较方便灵活。然而,相空间有限元方法也具有很大的缺点,那就是占用计算机内存大,计算时间长,往往是SN方法的几十倍,但由于有限元方法程序结构清晰,标准化程度较高,而且有限元方法中有限元方程系数矩阵的稀疏性,通过对矩阵的压缩存储,计算时间和内存量的需求都会大大减少。

表3 表征系统状态的几个参数计算结果的比较

方法	S2	FEM	S4	实验值
KEFF	0.9904	1.0017	1.0046	1.00
λ ($1/\mu s$)	-1.6301	0.2861	0.8019	0.00

参 考 文 献

- 1 杜明笙等. 计算物理. 1987,4(4):401
- 2 MILLER W F Jr, LEWIS E. E and Rossow E C. The Application of Phase-Space Finite Elements to the Two-Dimensional Neutron Transport Equation in X-Y Geometry. Nucl. Sci. Eng. 1973,52(12)
- 3 杜书华等. 输运问题的计算机模拟. 长沙:湖南科技出版社,1989
- 4 王勖成. 有限单元法基本原理与数值方法. 北京:清华大学出版社,1988
- 5 Paxton H C. Los Alamos Critical-Mass Uata. LA-3067-Ms, 1975
- 6 Donald J H and Robert B S. Neutron Cross Sections. Brookhaven National Laboratory, 1958
- 7 张树发等. 二维非定常中子输运的并行算法. 国防科技大学报, 1986(3)

(责任编辑 石少平)