

一种精确积分的四边形四结点等参单元*

易晓山 任钧国 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 针对平面问题四边形四结点单元,提出一种新的等参变换方法。采用平行四边形母单元和相应的形函数,推导出四边形四结点等参单元刚度矩阵的精确积分解。理论和数值分析表明,该方法从根本上克服了数值积分带来的误差,计算单元刚度矩阵的速度比传统的高斯两点积分方法快近三倍。

关键词 四边形单元,精确积分,有限元法

分类号 O34

An Accurately Integrated 4-Node Quadrilateral Element

Yi Xiaoshan Ren Junguo Zhou Jianping

(Department of Astronautics Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, a new isoparametric transformation of a parallel quadrilateral parent element and the associated shape function is constructed to derive the accurately integrated stiffness matrix of the 4-nodes quadrilateral element. It has been demonstrated by theoretical and numerical analysis that the error of numerical integration is overcome by using the method and the computing speed of the method is almost three times of that of the two-point Gauss' integration.

Key words quadrilateral element, accurately integration, finite element method

常用的平面四结点等参元^[1,2]采用将正方形母单元映射为任意四边形单元的方法适应不规则的边界,这样单元刚度矩阵难以写成积分的显式,必须采用数值积分求解。这给有限元求解引入了新的误差,特别对于非规则划分四边形单元,不适当的积分阶次可能带来较大误差。本文采用一种平行四边形母单元,推导出平面四结点等参单元刚度矩阵的精确解。算例表明,该方法在速度和精度上都明显优于传统的高斯积分方法。

1 平行四边形母单元的构造

局部坐标系 $\omega\eta$ 下的平行四边形单元(如图1),不妨设其形心坐标为 $(a,0)$,单元角结点的坐标依次为: $(a-b-c, -1)$ 、 $(a+b-c, -1)$ 、 $(a+b+c, +1)$ 和 $(a-b+c, +1)$ 。单元边界方程可用 $\eta \pm 1 = 0$ 和 $\omega - c\eta - a \pm b = 0$ 逐一给出。设位移模式为如下形式:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (1)$$

式中 u_i, v_i 为结点 i 的位移分量。

该单元的形函数 N_i 的表达式如下:

$$N_i = \frac{1}{4b}(1 + \eta_i \eta)[b + \xi_i(\omega - c\eta - a)] \quad (2)$$

其中 η_i 为结点 i 的 η 坐标, ξ_i 为一组常数($\xi_1 = -1, \xi_2 = +1, \xi_3 = +1, \xi_4 = -1$)。

* 1997年2月25日收稿

第一作者:易晓山,男,1968年生,博士后

故此利用形函数式(2)作如下坐标变换

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (3)$$

对于任意四边形子单元,式(1)~(3)定义的变换构成一种新的等参变换。

2 精确积分单元刚度矩阵

上述坐标变换雅可比行列式

$$|J| = \frac{1}{16b^2} [(bA_0 - aB_0) + B_0\omega + (bC_0 - cB_0)\eta] \quad (4)$$

其中 $A_0 = X_\xi Y_\eta - Y_\xi X_\eta$, $B_0 = X_\xi Y_{\xi\eta} - Y_\xi X_{\xi\eta}$, $C_0 = X_{\xi\eta} Y_\eta - Y_{\xi\eta} X_\eta$,

$$\left. \begin{aligned} X_\xi &= \sum_{i=1}^4 x_i \xi_i & X_\eta &= \sum_{i=1}^4 x_i \eta_i & X_{\xi\eta} &= \sum_{i=1}^4 x_i \xi_i \eta_i \\ Y_\xi &= \sum_{i=1}^4 y_i \xi_i & Y_\eta &= \sum_{i=1}^4 y_i \eta_i & Y_{\xi\eta} &= \sum_{i=1}^4 y_i \xi_i \eta_i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

可以证明对于凸性四边形单元,必有 $A_0 - |B_0| - |C_0| > 0$; 对于非凸性四边形单元,必有 $A_0 - |B_0| - |C_0| < 0$ (证明从略)。因此 $A_0 - |B_0| - |C_0|$ 可以作为判断几何划分正确与否的判据。以下的讨论均对于正确几何划分的凸性四边形单元进行。

(1) 假定 B_0 不等于 0, 取 $a = A_0, b = B_0, c = C_0$, 则有 $|J| = \frac{\omega}{16B_0}$ 。积分域内恒有 $\omega \geq A_0 - |B_0| - |C_0|$, 对应凸性的四边形单元雅可比行列式不变号。经过整理, 可得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{b\omega} \begin{Bmatrix} A_{ix} + B_{ix}\omega + C_{ix}\eta \\ A_{iy} + B_{iy}\omega + C_{iy}\eta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{其中} \quad \left. \begin{aligned} A_{ix} &= \xi_i (bY_\eta - aY_{\xi\eta}) - Y_\xi \eta_i (b - a\xi_i) & A_{iy} &= -\xi_i (bX_\eta - aX_{\xi\eta}) + X_\xi \eta_i (b - a\xi_i) \\ B_{ix} &= \xi_i (Y_{\xi\eta} - \eta_i Y_\xi) & B_{iy} &= -\xi_i (X_{\xi\eta} - \eta_i X_\xi) \\ C_{ix} &= -cB_{ix} + b\eta_i (\xi_i Y_\eta - Y_{\xi\eta}) & C_{iy} &= -cB_{iy} - b\eta_i (\xi_i X_\eta - X_{\xi\eta}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

单元刚度矩阵可划分成 16 块 2×2 的子矩阵的形式, 子矩阵的计算公式是

$$k_{ij} = \iint_{\Omega_{\omega\eta}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j h |J| d\omega d\eta \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

式中 h ——单元的厚度, $\Omega_{\omega\eta}$ 分别表示 $\omega\eta$ 坐标系下积分域, \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 分别表示材料弹性矩阵和应变形状函数矩阵。

从有限元公式分析可知, 为计算元素刚度矩阵, 必须计算如下积分

$$I_{ij} = \iint_{\Omega_{\omega\eta}} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \beta} \cdot |J| d\omega d\eta \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 代表 } x \text{ 或 } y) \quad (9)$$

形如式(9)的积分可以以解析的形式给出。该积分的显式表达为

$$I_{ij} = \frac{1}{4B_0^2} (aB_{ix}B_{j\beta} + A_{ix}B_{j\beta} + B_{ix}A_{j\beta}) + \frac{1}{8B_0^3} (A_{ix}A_{j\beta} + \frac{1}{3}C_{ix}C_{j\beta}) \ln \frac{A_0 + B_0}{A_0 - B_0} \quad (C_0 = 0) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \frac{1}{4B_0^2} (A_0B_{ix}B_{j\beta} + A_{ix}B_{j\beta} + B_{ix}A_{j\beta}) \\ &+ \frac{1}{16B_0^3} [A_{ix}A_{j\beta}H_1 + (A_{ix}C_{j\beta} + C_{ix}A_{j\beta})H_2 + C_{ix}C_{j\beta}H_3] \quad (C_0 \neq 0) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $H_1 = D_1E_1 + D_4E_4 - D_2E_2 - D_3E_3$

$$H_2 = \frac{1}{2}D_1D_2(E_2 - E_1) - \frac{1}{2}D_3D_4(E_4 - E_3) + (D_1 - D_3)$$

$$H_3 = \frac{1}{3} \{ [1 + (D_1 - 1)^3](E_1 - E_2) + [1 + (D_3 - 1)^3](E_4 - E_3) \} \quad (12)$$

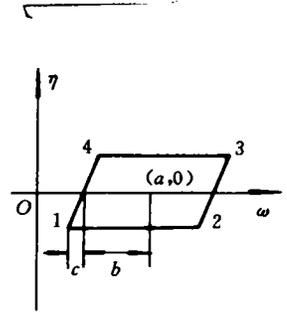


图1 平行四边形母单

$$+ \frac{2}{3}[(E_2 - E_4) + (D_3 - 1)^2 - (D_1 - 1)^2]$$

$$D_1 = \frac{A_0 + B_0 + C_0}{C_0}; \quad D_2 = \frac{A_0 + B_0 - C_0}{C_0}; \quad D_3 = \frac{A_0 - B_0 + C_0}{C_0}; \quad D_4 = \frac{A_0 - B_0 - C_0}{C_0};$$

$$E_1 = \ln(A_0 + B_0 + C_0); \quad E_2 = \ln(A_0 + B_0 - C_0);$$

$$E_3 = \ln(A_0 - B_0 + C_0); \quad E_4 = \ln(A_0 - B_0 - C_0);$$

(2) 当 $B_0 = 0$ 时, 式 (4) 可以写成 $|J| = \frac{1}{16b^2}(bA_0 + bC_0\eta)$ 。不妨取 $a = 0, b = 1, c = 0$, 此时平行四边形母单元退化为正方形母单元, 积分式 (9) 可以得到显式表达。

$$I_{ij} = \frac{1}{4A_0}(A_{ia}A_{j\beta} + \frac{1}{3}B_{ia}B_{j\beta} + \frac{1}{3}C_{ia}C_{j\beta}) \quad (C_0 = 0) \tag{13}$$

$$I_{ij} = \frac{1}{8C_0} \ln \frac{A_0 + C_0}{A_0 - C_0} [A_{ia}A_{j\beta} + \frac{1}{3}B_{ia}B_{j\beta} + \frac{A_0^2}{C_0^2}C_{ia}C_{j\beta} - \frac{A_0}{C_0}(A_{ia}C_{j\beta} + C_{ia}A_{j\beta})] + \frac{1}{4C_0}(A_{ia}C_{j\beta} + C_{ia}A_{j\beta} - \frac{A_0}{C_0}C_{ia}C_{j\beta}) \quad (C_0 \neq 0) \tag{14}$$

3 单元性质

尽管相邻的母单元在各自的局部坐标中形函数的表达式不同, 但交界线上的点的位移由线上两角结点位移采用相同的线性插值唯一确定, 故单元的协调性得以满足。应用式 (4) ~ (6) 可验证单元内的位移是刚体位移或对应于常应变的位移, 单元完备性得到满足。对于等参单元高斯积分点处的应力精度较高。不妨记正方形母单元的第 i 个高斯积分点的坐标为 (ξ_i^*, η_i^*) , 在平行四边形母单元中相应点的坐标为 $(A_0 + B_0\xi_i^* + C_0\eta_i^*, \eta_i^*)$ 。采用平行四边形母单元等参变换时, 可采用这些相应点的应力来表示单元应力状态。

4 算例分析

算例 1 随机构造 625 个四边形单元, 比较采用平行四边形等参变换方法 (简称为精确积分法) 和传统正方形母单元等参变换方法 (简称数值积分法), 生成单元刚度矩阵耗用的计算机 CPU 时间, 结果见表 1。结果表明, 采用精确积分法速度比两点高斯积分法快近 3 倍, 比八点高斯积分法快近 36 倍。

表 1 精确积分法与数值积分法计算时间比较 (Pentium/90 计算机)

计算方法	精确积分法	数值积分法		
		两点高斯积分	三点高斯积分	八点高斯积分
计算时间 (s)	0.06	0.17	0.33	2.14

算例 2 一个四边形四结点单元 (如图 2), 结点 1, 2, 3, 4 坐标为 $(0, 0), (1, 0), (1, 0.5), (0, 1, y)$ 。当 y 由 0.5 减小至 0.05, 四边形形状从接近矩形变为极不规则。比较当 y 取不同值时, 采用数值积分法求得的单元刚度矩阵主对角元素与精确积分解的平均相对误差。采用如下误差计算公式

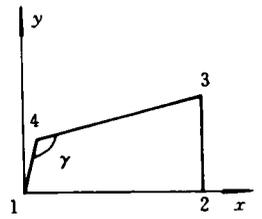


图 2

$$e^{(l)} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \left| \frac{k_{ii}^{(l)} - k_{ii}^*}{k_{ii}^*} \right| \quad (l = 2, 3, 8)$$

式中 k_{ii} 表示单元刚度矩阵第 i 行主对角元素, 上标 (l) 表示 l 点高斯积分解, 上标 * 表示精确积分解。计算结果 (表 2) 表明, 单元几何划分愈不规则时, 数值积分解精度愈差; 内角 γ 接近 180° (时, 两点高斯积分法存在相对大的误差。

表2 单元刚度矩阵主对角元素数值积分与精确积分的平均相对误差

γ	$\gamma(^{\circ})$	$\epsilon^{(2)}$	$\epsilon^{(3)}$	$\epsilon^{(8)}$
0.06	175.1	1.45×10^{-1}	6.09×10^{-2}	1.26×10^{-3}
0.075	168.4	1.04×10^{-1}	3.23×10^{-2}	1.21×10^{-4}
0.10	159.0	6.62×10^{-2}	1.40×10^{-2}	6.91×10^{-6}
0.20	135.0	1.64×10^{-2}	1.04×10^{-3}	2.12×10^{-7}
0.30	121.0	4.37×10^{-3}	8.22×10^{-5}	2.11×10^{-7}
0.40	110.4	7.93×10^{-4}	1.62×10^{-5}	2.10×10^{-7}
0.50	101.0	4.88×10^{-5}	1.07×10^{-6}	2.10×10^{-7}

5 结论

与传统正方形母单元等参变换高斯积分方法相比, 本文方法有如下优点: (1) 从根本上避免了数值积分产生的误差, 即便四边形形状极不规则亦能求出精确的单元刚度矩阵, 精度较数值积分高。(2) 直接进行代数运算求解, 比常用的两点高斯积分快将近3倍。(3) 中间变量 $A_0 - |B_0| - |C_0|$ 可用以对单元几何性态进行验证。对于错误几何划分的单元, 该方法在计算中能自动的加以判断。综上所述, 采用平行四边形母单元构造的精确积分法具有精度高、速度快、适应不规则网格划分能力强以及自动校验单元几何性态的优点, 特别对于采用自动网格生成的大规模问题, 能大大提高计算速度、精度和可靠性。

参考文献

- 1 Irons B M. Numerical integration applied to finite element methods. Conf. Use of Digital Comp. in Struct. Eng. Univ. of Newcastle, 1966
- 2 监凯维奇 O C. 有限元法. 伊泽勇等译, 北京: 科学出版社, 1985