

## 钝倒锥体动导数数值工程模拟\*

刘 伟

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

沈 清 张鲁民 张涵信

(中国空气动力研究与发展中心 绵阳 621000)

**摘 要** 分别采用求解非定常薄层近似的 N-S 方程数值模拟有粘扰动流场及非定常内伏牛顿流理论计算了钝倒锥外形的高超声速俯仰阻尼导数  $C_{m\dot{\alpha}} + C_{m\dot{\gamma}}$ 。在非定常计算中通过引入“亚迭代”过程提高非定常流场的计算精度。两种方法计算结果一致,数值计算可应用于  $3 < M < 20, 0^\circ < \alpha < 20^\circ$  时的一般流态俯仰阻尼导数计算。

**关键词** 动导数, 数值计算, 工程方法, N-S 方程

**分类号** V211.3

## Numerical and Analytic Simulation of the Dynamic Stability Derivative of Blunt Cone

Liu Wei

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Shen Qing Zhang Lumin Zhang Hanxin

(China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, 621000)

**Abstract** In this paper, the supersonic damping-in-pitch derivatives of blunt body are calculated with two methods. One is simulant unsteady viscous flow field by solving N-S equations, and another is the analytic method of unsteady embeddy Newtonian theory. According to the numerical method, the precision of unsteady flow calculation is improved by using sub-iteration. Similar results are obtained through the two methods. The numerical method can be applied to general flow calculation ( $3 < M < 20, 0^\circ < \alpha < 20^\circ$ ).

**Key words** dynamic stability derivative, numerical calculation, analytic method, N-S equations

现代航天技术和导弹技术的发展,特别是载人飞船、航天飞机、机动弹头等方面的研究,使人们对航天飞行器的动态稳定性控制愈加关注。然而,由于涉及到异常复杂的非定常流动问题,不管是试验还是计算确定动导数都是十分复杂而又困难的。在计算方面,近二十多年来,主要集中在一些经验或半经验方法,像牛顿-玻尔兹曼理论、内伏牛顿理论、活塞理论等等,而数值方法一方面由于巨大的非定常计算工作量让人望而生畏,另一方面也在于动导数计算理论尚不完善,使得很长一段时期里动导数计算局限于简单外形在小攻角假定下的线性情况,比较典型的有 Hui 的谐振摄动理论<sup>[1]</sup>,国内刘秋生等人也在 Hui 工作基础上做了进一步的发展<sup>[2]</sup>,求解了球锥外形在小攻角下的 Euler 方程。随着 90 年代初计算机速度的大大提高以及数值计算技术的逐步成熟,使人们看到了动导数计算方法进一步发展的曙光。

\* 1997 年 3 月 20 日收稿

第一作者:刘伟,男,1965 年生,工程师

目前,非线性条件下的动态稳定性问题较为成熟的理论是 Tobak 和 Schiff 的非线性指示响应泛函理论<sup>[3]</sup>,遗憾的是,在一般情况下指示响应泛函的确定非常困难,本文采用在实际应用中较为广泛的 Etkin 动导数假设<sup>[4]</sup>,通过求解非正常薄层近似的 N-S 方程模拟扰动流场计算钝倒锥体俯仰阻尼导数,在计算中通过引入“亚迭代”过程提高非正常流场计算精度。另外,本文还采用半经验性的非正常内伏牛顿流理论进行了计算。

## 1 数值计算方法

采用薄层近似的 N-S 方程模拟绕流流场,其一般坐标系下的无量纲方程形式为:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = Re^{-1} \frac{\partial S}{\partial \zeta} \quad (1)$$

### 1.1 定常流场计算格式

本文采用文献 [5] 提出的隐式 NND 格式,该格式形式简单、计算效率高、激波捕捉能力强。式 (1) 的离散形式为

$$\left[ I + \Delta t \left( \delta_\xi \frac{\partial E}{\partial Q} + \delta_\eta \frac{\partial F}{\partial Q} + \delta_\zeta \frac{\partial G}{\partial Q} \right) \right] \Delta Q^{n+1} = - \Delta t [\delta_\xi E + \delta_\eta F + \delta_\zeta G - Re^{-1} \delta_\zeta S]^n \quad (2)$$

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q^{n+1}$$

式中,粘性项  $\delta_\zeta S^n$  采用中心差分离散并显式处理。 $\delta_\xi E$ 、 $\delta_\eta F$ 、 $\delta_\zeta G$  形式见文献 [5],引入因式分解并对左端标量化处理,得到

$$R_\xi (I + \Delta t \delta_\xi \Lambda_\xi) R_\xi^{-1} R_\eta (I + \Delta t \delta_\eta \Lambda_\eta) R_\eta^{-1} R_\zeta (I + \Delta t \delta_\zeta \Lambda_\zeta) R_\zeta^{-1} \Delta Q^{n+1} = RHS(2)$$

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q^{n+1} \quad (3)$$

这是一个空间二阶离散的隐式格式。

### 1.2 非正常流场计算格式

在数值求解 N-S 方程进行定常流场计算时,为了提高计算效率,目前人们一般采用对左端项进行对角标量化或 LU 分解等技术处理的隐式格式,大大提高了定常流场的收敛效率。但是,由于对角化等技术的引入,使得格式的时间精度有所损失,国外近几年提出了一种通过引入“亚迭代”过程来提高时间方向精度的方法<sup>[6]</sup>,它具有形式简单,编程容易等特点。下面,本文对 (3) 式给出引入“亚迭代”过程的隐式 NND 格式,并采用该格式计算钝倒锥体的非正常流场,格式形式如下:

$$L(\Delta Q^\nu) = - \Delta t \left[ \frac{3Q^\nu - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t_R} + \delta_\xi E^\nu + \delta_\eta F^\nu + \delta_\zeta G^\nu - Re^{-1} \delta_\zeta S^\nu \right] \quad (4)$$

$$\text{如: } \lim_{\nu \rightarrow \infty} L(\Delta Q^\nu) \rightarrow 0, \text{ 则 } Q^{n+1} = Q^n$$

式中,算子  $L(\Delta Q^\nu)$  代表式 (3) 的左端项,  $\Delta t_R$  代表真实时间步长,  $\Delta t$  表示在某一“冻结时刻(真实)”时“亚迭代”时间步长,  $Q^{n-1}$ 、 $Q^n$  分别表示在第  $n-1$ 、 $n$  真实时刻的守恒矢量,上标“ $\nu$ ”表示亚迭代计算值,若式 (4) 中“亚迭代”收敛,即:  $\nu \rightarrow \infty$  时,  $L(\Delta Q^\nu) \rightarrow 0$ , 令  $Q^{n+1} = Q^n$ , 则有:

$$\frac{3Q^{n+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t_R} + \delta_\xi E^{n+1} + \delta_\eta F^{n+1} + \delta_\zeta G^{n+1} - Re^{-1} \delta_\zeta S^{n+1} = 0 \quad (5)$$

显然,这是式 (1) 的差分形式,当  $\nu \rightarrow \infty$  时,时间离散在  $n+1$  时刻逼近二阶精度。

### 1.3 网格及初边值条件

本文采用简单的代数网格,空间结点  $(\xi, \eta, \zeta)$  对应的笛卡尔坐标  $r(\xi, \eta, \zeta)$  可写成:

$$r(\xi, \eta, \zeta) = r_w(\xi, \eta) + a(\zeta) |r_s - r_w| \quad (6)$$

式中,  $r_s$ 、 $r_w$  分别为计算流场外边界、内边界坐标,  $a(\zeta)$  为压缩系数。

稳定流场和动态流场计算时,壁面上均给定无滑移和等温壁条件,外边界按流场划分为入流边界条件和出流边界条件。由于只考虑俯仰运动,流场左右对称,采用对称条件处理对称面。计算初始条件,稳定流场给定未受扰动的均匀流场,动态流场计算以稳定流场为初场。

### 1.4 动导数计算方法

本文采用绕质心的强迫振动方法求解俯仰阻尼导数,所选取的振动形式为:

$$\alpha = \theta = C_0 + C_1 \cos kt \quad (7)$$

式中： $\alpha$  为攻角， $\theta$  为俯仰角， $C_0$  为平均攻角， $C_1$  为振动幅度， $k$  为缩减频率。在满足

- 基准飞行状态为对称定直飞行且扰动幅度很小；
- 计算中只考虑一阶动导数，忽略高阶导数项；
- 气动力矩  $C_m(t)$  达到周期解。

时，可从 Etkin 对俯仰力矩  $C_m(t)$  的一般表达式（仅有状态变量  $\alpha, q$  时）推出：

$$C_m(t) = C_{m_0} + C_{m_{\alpha_0}} \Delta \alpha + C_{m_{\theta}} \Delta \theta \quad (8)$$

式中： $C_{m_{\theta}} = C_{m_{\alpha}} + C_{m_{q}}$  为俯仰阻尼导数， $C_{m_0}, C_{m_{\alpha_0}}$  分别为  $t = 0$  时的  $C_m, C_{m_{\alpha}}$  值，其中  $C_{m_{\alpha}}$  值可通过定态流场差分求出。显然，(8) 式是单参数  $C_{m_{\theta}}$  的数值辨识问题。本文采用最小二乘法求解。如令： $x_i = \Delta \theta_i$ ， $y_i = C_m(t_i) - C_{m_0} - C_{m_{\alpha_0}} \Delta \alpha_i$ ，那么，计算  $C_{m_{\theta}}$  公式如下：

$$C_{m_{\theta}} = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \quad (9)$$

其中  $n$  为离散点选取个数。

## 2 非定常内伏牛顿流计算方法

目前，国内外已发表的超音速、高超音速经验或半经验性计算方法有许多种，如牛顿理论、内伏牛顿流理论、切锥法、OSU 经验公式、Dahlem-Bach 方法等等。相对来说，Ericsson 发展的非定常内伏牛顿流理论在实际应用中较为广泛，本文采用该理论计算倒锥体的俯仰阻尼导数。将计算体表面划分成若干面元，利用非定常内伏牛顿流理论计算出面元上的气动力系数，最后通过积分求出整个物体的气动力系数。非定常内伏牛顿流理论计算公式如下：

$$C_p = f_1 C_{p0} + C_{p_{\max}} \left( \frac{U_{\perp}}{U} \right)^2 f(x^*, M) \quad (10)$$

其中， $C_{p_{\max}}$  为最大压力系数， $U_{\perp}/U$  为物面法向速度分量， $f(x^*, M)$  为动压比函数。

$$C_{p_q} = C_{p_{\max}} \frac{V_{\perp}}{V_{\infty}} \left[ 2f(x^*, M_{\infty}) \left( \frac{V_{\perp}}{V_{\infty}} \right)_q \right]$$

$$C_{p_{\alpha}} = C_{p_{\max}} \left( \frac{U_{\perp}}{U} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Delta z} \cdot \frac{\partial \Delta z}{\partial \alpha}$$

面元  $ds$  上的动导数为：

$$dM_{y\alpha} = dF_{\infty} \cdot z - dF_{nq} \cdot x$$

$$dM_{yq} = dF_{\alpha q} \cdot z - dF_{nq} \cdot x$$

式中：

$$dF_{\alpha q} = C_{p_q} \cdot n_x ds, \quad dF_{nq} = C_{p_q} \cdot n_z ds,$$

$$dF_{\alpha\alpha} = C_{p_{\alpha}} \cdot n_x ds, \quad dF_{n\alpha} = C_{p_{\alpha}} \cdot n_z ds,$$

沿物面积分得俯仰阻尼导数  $C_{m_{\alpha}} + C_{m_{q}}$ ：

$$C_{m_{\alpha}} + C_{m_{q}} = \frac{\sum (dM_{yq}) + \sum (dM_{y\alpha})}{L \cdot S} \quad (11)$$

$L, S$  分别为参考长度和参考面积。

## 3 计算结果及分析

下面给出采用数值和内伏牛顿流理论两种方法求解钝倒锥体外形绕质心振动时的俯仰阻尼导数结果。图 1 是计算网格，参考面积和参考长度分别取最大截面面积和最大截面直径。数值计算网格数为  $65 \times 19 \times 41$ ，物体绕俯仰轴振动时，网格与物面无相对运动，并与物面做固连振动，计算来流条件为： $M_{\infty} = 6, \alpha = 0^{\circ}, 10^{\circ}, 20^{\circ}, Re = 2.4 \times 10^6, T_w = 300K, T_{\infty} = 67K$ ，假定层流状态， $C_1 = -1^{\circ}$ ，减缩频率  $k = 1$ ；图 2 给出了  $\alpha = 20^{\circ}$  时的  $C_m$  与  $\alpha$  关系图，从  $C_m$  滞后圈可看到非定常流动所存在的明显的滞后效

应;图3给出了 $\alpha = 20^\circ$ 时的 $C_m$ 随时间历程图,可见振动半周期后数值计算所得到的非定常流场有了很好的谐振性。表1是数值方法与内伏牛顿流理论计算的结果比较。可见两种方法在符号和量级是一致的,这从一定程度说明了两种方法计算结果的可信度。大量计算表明,数值计算方法可以应用于 $3 < M < 20, 0^\circ < \alpha < 20^\circ$ 时的一般流态俯仰阻尼导数计算。

目前,确定动导数不管是试验还是计算都还不能得到高精度结果,有文章指出<sup>[2]</sup>动导数试验结果的分散度(误差带)相当大,即使对一些简单物形,公开发表的数据中,误差在20%以上的并不少见,而数值计算由于涉及到非定常流动计算和动导数理论的不完善,还

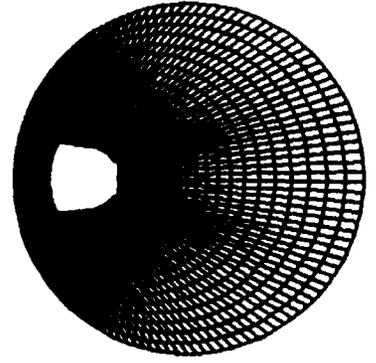


图1 计算网格

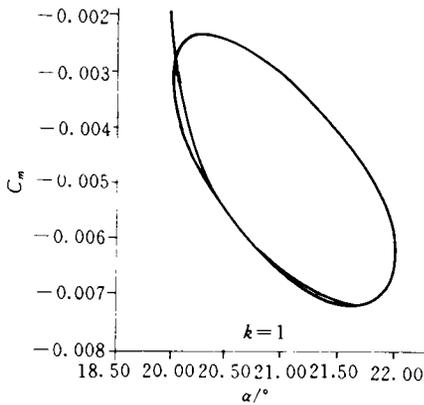


图2  $C_m$  随攻角变化曲线

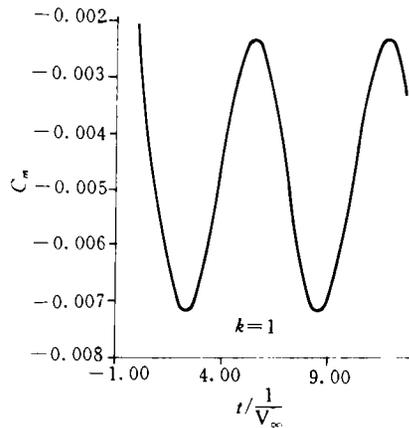


图3  $C_m$  随时间历程变化曲线

处于发展阶段,因此本文的工作还是初步的,包括偏航、滚转阻尼导数的计算以及动导数其它方面的工作尚待今后去做。

表1 数值、工程计算 $C_{ma} + C_{mq}$ 结果( $M = 6$ )

攻角	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$
数值方法	-0.0790	-0.1123	-0.1041
内伏牛顿理论	-0.0915	-0.0929	-0.0940

## 4 结论

(1) 本文分别采用求解薄层近似的N-S方程模拟非定常流场和非定常内伏牛顿流理论计算了钝倒锥体外形的俯仰阻尼导数,计算结果一致。

(2) 数值计算方法可以应用于 $3 < M < 20, 0^\circ < \alpha < 20^\circ$ 时 $C_{ma} + C_{mq}$ 计算。

## 参考文献

- Hui W H. Exact Theory for the Stability of an Oscillating Wedge in Hypersonic and Supersonic Flow. Rept. 277, 1968, Dept. of Aeronautics and Astronautics. Univ. of Southampton
- 刘秋生, 沈孟育. 球锥俯仰阻尼导数的数值计算. 空气动力学学报, 1995, 13 (2)
- Tobak, Schiff. Aerodynamic Mathematical Modeling Concepts. AGARD-LS-114, 1981
- Etkin B. Dynamics of Atmospheric Flight. John Wiley & Sons, Inc. 1972
- 沈清. 一种高精度、高分辨率激波捕捉的迎风型NND格式. 第七届全国计算流体力学会议文集, 1994
- Gaitonde A L. A Dual-time Method for the Solution of the Unsteady Euler Equations. Aeronautical Journal, 1994 (10).