一类典型多态关联系统的可靠性定性性质*

夏胜平　曾亮　谢红卫

（国防科技大学自动控制系　长沙　410073）

摘　要　定义了一种典型的多态关联系统逻辑结构，该类系统在工程实践中有一定的应用范围。由于这类系统的结构比较特殊，因此有比较优良的定性性质，而可靠性分析中，最小路集求解是定性分析最主要的研究内容之一。针对这种结构的系统，研究了相应的最小路集求解方法，这种方法的运算量远小于一般系统最小路集求解方法的运算量。

关键词　多态关联系统，可靠性，结构函数，逻辑结构，最小路集

分类号　TP202.1

Some Properties of Multistate Coherent System with Typical Logical Structure

Xia Shengping　Zengliang　Xie Hongwei

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　In this paper, we define a kind of multistate coherent system which is of typical logic structure. This kind of system is widely used in engineering. Because of its special structure, it is convenient to analyse its deterministic properties. For this kind of system, a special method of finding the minimal path vector sets is studied, which is much easier than the general method.

Key words　multistate coherent system, reliability, structure function, logical structure, minimal path set

本世纪 40 年代以来，可靠性理论研究得到了很大的发展，特别是二态可靠性理论已经相当成熟。然而，系统及其部件只呈现成功、失败两状态的基本假设使得理论研究难以向纵深发展。这种二态分划对许多实际系统来说都是一种过于简单的假设，这些系统及其部件还可以呈现从最佳工作状态到完全失效状态之间的多种可能的工作状态[2~8]，这些状态称之为降格成功状态。

70 年代末，以文［1］给出多态关联系统（multistate coherent system：MCS）定义为标志，开始了多态关联系统可靠性理论研究。之后，文［2～8］等围绕关联约束条件定义了多种不同性质及应用范围的多态关联系统。然而，根据这些关联约束并不能唯一确定一个多态关联系统，如满足本文定义 2.1 的三态两部件关联系统可能有 30 种逻辑模型；三态三部件关联系统则可能有 29312 种逻辑模型；随着状态数目和部件数目的增加，可能的系统逻辑模型种数以指数级增加。这就是多态关联系统可靠性分析中建模阶段最棘手的所谓 NP 问题。

然而，工程实践中不可能用到所有的多态关联系统逻辑模型，这促使进一步探求工程系统逻辑结构的内在规律。对照多态关联系统的特性，作者借鉴多值逻辑[9]中 Majority 函数定义了一类 MF 型结构的多态关联系统，这种结构的系统在工程实践中有一定的应用范围，更突出的一点是由于其特殊结构和性质。该类系统的最小路集求解也有相应的特殊方法，这较之于一般系统可靠性分析中最小路集求解方法要有效得多。本文基本符号与术语如下：

C　　　　n 个相互统计独立部件的集合

* 1997 年 7 月 10 日收稿
第一作者：夏胜平，男，1969 年生，博士生

$S=\{0,1,2,\cdots,M\}$, 系统的全序状态集，$0<1<2<\cdots<M$

$S_i=\{0,1,2,\cdots,M_i\},i=1,2,\cdots,n$, 部件的全序状态集，$0<1<2<\cdots<M_i$,

$\prod_{i=1}^{n}S_i$ 部件状态集的笛卡尔积，即系统的状态空间

$\varphi:\prod_{i=1}^{n}S_i\rightarrow S$, 为一满映射，是多态系统结构函数，记为 $\varphi(X)$

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),X,Y\in\prod_{i=1}^{n}S_i,x_i,y_i\in S_i$

$(\cdot_i,X)=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},\cdot_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}S_i$

1 典型多态关联系统结构与定性性质

1978 年以来，文 [1～8] 等定义了 10 余种关联约束条件的多态关联系统，这些条件几乎没有两个是完全相同的。然而概括这些约束条件可得到系统建模必要的基本假设条件，即所谓的 s-关联性假设，由此给出如下多态关联系统的基本定义：

定义 1 多态关联系统。设任意的多态系统可以用一个四元组（C，φ，$\prod_{i=1}^{n}S_i$，S）来描述，且满足如下条件：

(1) $\varphi(0)=0$，$\varphi(M)=M$，其中 $0=(0,0,\cdots0)$，$M=(M_1,M_2,\cdots,M_n)$；

(2) $\varphi(X)$ 单调非减，即$\forall X,Y\in\prod_{i=1}^{n}S_i$，$x_i\leq y_i$，$i=1,2,\cdots,n\Rightarrow\varphi(X)\leq\varphi(Y)$；

(3) $\forall i\in C$，$\forall k,l\in S_i$，$k\neq l$，$\exists(\cdot_i,X)\in\prod_{i=1}^{n}S_i$，$\varphi(k_i,X)\neq\varphi(l_i,X)$ 称满足这种条件的部件为系统的相关部件；称这样的多态系统为多态关联系统，记作 MCS$\varphi(X)$。

上述定义并不能唯一确定一个多态关联系统，因此借鉴多值逻辑中的 Majority 函数，定义了如下结构的多态关联系统：

定义 2 对 MCS$\varphi(X)$，若存在权重 $W=(W_1\cdots W_n)$，阈值 $T=(T_1\cdots T_M)$，W_i、T_i 为非负整数，使得

$$N_\theta(X)=\sum_{x_i=\theta}W_i\qquad\theta=1,\cdots,M$$

$$\varphi(X)=M\Leftrightarrow N_M(X)\geq T_M$$

$$\varphi(X)=M-1\Leftrightarrow\quad N_M(X)<T_M,\quad\sum_{\theta=M-1}^{M}N_\theta(X)\geqslant T_{M-1}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(X)=i\Leftrightarrow\sum_{\theta=i}^{M}N_\theta(X)\geq T_i,\quad\sum_{\theta=i+1}^{M}N_\theta(X)<T_{i+1}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(X)=1\Leftrightarrow\sum_{\theta=1}^{M}N_\theta(X)\geq T_1,\quad\sum_{\theta=2}^{M}N_\theta(X)<T_2$$

$$\varphi(X)=0\Leftrightarrow\sum_{\theta=i}^{M}N_\theta(X)<T_1$$

则称结构函数 $\varphi(X)$ 有 MF $[W,T]$ 型结构（Majority Function）。

在给定一组参数 $[W,T]$ 的情况下，可以唯一确定一个多态关联系统。这种逻辑结构的多态关联系统在工程实践中有较广的应用面，例如：

多态关联系统中串联、并联、$[k/n:G]$ 等典型模型有如下的 MF $[W,T]$ 型结构：

串联：MF $[W,T]_1=$MF $[\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n},\underbrace{M,M,\cdots,M}_{M}]$；

并联：MF $[W, T]_2$=MF $[\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n}, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{M}]$；

k/n：G：MF $[W, T]_3$=MF $[\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n}, \underbrace{k, k, \cdots, k}_{M}]$；

另外，如投票表决系统[9~10]也是一类在工程实践中用得很多的典型系统。为了研究该类系统的性质，进一步给出如下定义：

定义3 MF $[W, T]$ 型结构的正则标准型。

若 MF $[W, T]$ 的权重 $W=(W_1 \cdots W_n)$ 满足：$W_1 \geq W_2 \geq \cdots \geq W_n > 0$ 则称权重为正则的；称这样的系统为 MF $[W, T]$ 型结构的正则标准型。

性质1 若 MCS$\varphi(X)$ 具有 MF $[W, T]$ 型结构，

$$\varphi(X) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n) = \mathrm{MF}[W_1, W_2, \cdots, W_i, \cdots W_j, \cdots, W_n; T]$$

则 $\varphi(X') = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n) = \mathrm{MF}[W_1, W_2, \cdots, W_j, \cdots W_i, \cdots, W_n; T]$。由性质1知，MF $[W, T]$ 型结构的 MCS$\varphi(X)$ 可以变换为相应的正则标准型。

定义4 文字算子及文字算子的合并运算。

1) 文字算子 $x^{a,b}$ 表示 $a \leq x \leq b$，若 $a=b$，则简记为 x^a；

2) 文字算子的合并运算

(1) 和运算 $x^{a,b}=x^{c,d} \oplus x^{e,f}$，其中 $a=\min(e, c)$，$b=\max(d, f)$，$e-1 \leq d$ 或 $c-1 \leq f$；

(2) 积运算 $x^{a,b}=x^{c,d} \otimes x^{e,f}$，其中 $a=\max(c, e)$，$b=\min(d, f)$，$e \leq d$，或 $c \leq f$；其中 x，y，a，b，c，d，e，$f \in S$，$c \leq d$，$e \leq f$。

定义5 若 $X=(a_1, a_2, \cdots a_n)$ 满足 $\varphi(X)\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \geq j\ (=j)$，则称乘积项 $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ 为 MCS$\varphi(X)$ 的一个（纯）j-路向量，（(pure) j-pathvector 记作（P）PV_j；

$X \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 满足 $\varphi(X) \geq j\ (=j)$，则称 $x_1^{a_1,b_1} x_2^{a_2,b_2} \cdots x_n^{a_n,b_n}$ 为 MCS$\varphi(X)$ 的一个（纯）j-路集，简记为（P）PVS_j；

定义6 设 $X, Y \in \prod_{i=1}^{n} S$，设 X 为 MCS$\varphi(X)$ 的一个（纯）j-路向量，若对任意的 Y，若 $X > Y$ 有 $\varphi(Y) < j$，则称 X 为 MCS$\varphi(X)$ 的一个最小（纯）j-路向量；MCS$\varphi(X)$ 的所有最小（纯）j-路向量的集合称为最小（纯）j-路集。

定义7 严格最小（纯）j-路向量、严格最小（纯）j-路集

设 $X=(a_1, a_2, \cdots a_n)$ 为 MCS$\varphi(X)$ 的一个最小（纯）j-路向量，若 $X \in \{0, j\}^n$，则 X 为 MCS$\varphi(X)$ 的严格最小（纯）j-路向量；若 MCS$\varphi(X)$ 的所有最小（纯）j-路向量均为严格最小（纯）j-路向量，则称系统有严格最小（纯）j-路集。

定理1 任意 MF $[W, T]$ 型结构的 MCS$\varphi(X)$ 其最小（纯）j-路集为严格最小（纯）j-路集。

定理2 给定 MF $[W, T]$ 型结构的 MCS$\varphi(X)$，则若门限 $T=[T_1, T_2, \cdots, T_n]$ 有 $T_1=T_2=\cdots=T_n$，则$\forall\ j=1, 2, \cdots, M$，最小纯 j-路集 $\mathrm{MPPVS_j}$ 等于最小 j-路集 $\mathrm{MPVS_j}$。

多态关联系统可靠性定性分析中一般要求得其最小 j-路集，为此定义如下的逻辑运算：

定义8 合取运算（consensus）

设乘积项 $P=x_1^{a_1,b_1} x_2^{a_2,b_2} \cdots x_n^{a_n,b_n}$、$Q=x_1^{c_1,d_1} x_2^{c_2,d_2} \cdots x_n^{c_n,d_n}$ 为 MCS$\varphi(X)$ 的两个 j-路集，则合取运算为：

$$\begin{aligned} \mathrm{consensus}(P,Q) = {} & x_1^{a_1,b_1} \oplus x_1^{c_1,d_1})(x_r^{a_2,b_2} \otimes x_2^{c_2,d_2}) \cdots (x_n^{a_n,b_n} \otimes x_n^{c_n,d_n}) \\ & + x_1^{a_1,b_1} \otimes x_1^{c_1,d_1})(x_r^{a_2,b_2} \oplus x_2^{c_2,d_2}) \cdots (x_n^{a_n,b_n} \otimes x_n^{c_n,d_n}) \\ & \vdots \\ & + (x_1^{a_1,b_1} \otimes x_1^{c_1,d_1})(x_2^{a_2,b_2} \otimes x_2^{c_2,d_2}) \cdots (x_i^{a_i,b_i} \oplus x_i^{c_i,d_i}) \cdots (x_n^{a_n,b_n} \otimes x_n^{c_n,d_n}) \\ & \vdots \\ & + x_1^{a_1,b_1} \otimes x_1^{c_1,d_1})(x_2^{a_2,b_2} \otimes x_2^{c_2,d_2}) \cdots (x_n^{a_n,b_n} \otimes x_n^{c_n,d_n}) \end{aligned}$$

对 MCS$\varphi(X)$ 的所有 j-路集进行合取运算直到不能产生新项为止，则最后所得的各乘积项对应的

最小向量即为 MCSφ（X）的所有最小 j-路向量，由此即得系统的最小 j-路集。这种方法求解系统的最小路集的运算量为 O（（$M+1$）^{n}）。然而，对 MF［W，T］型结构的 MCSφ（X），根据性质 1 和定理 1，可以将最小 j-路集求解问题转化为定理 3 所述的问题：

定理 3 正则标准型 MF［W，T］型结构的 MCSφ（X）最小纯 j-路集 MPPVS$_j$ 的求解可以转换为如下一个组合问题求解：

给定权重 $W_1 \geq W_2 \geq \cdots \geq W_n > 0$ 及门限 $T=[T_1, T_2, \cdots, T_n]$，求使得如下不等式成立的 j_1，j_2，…，j_l 的组合：

$$\begin{cases} \sum_{i=j_1}^{j_l} W_i \geq T_j \\ \sum_{i=j_1}^{j_{l-1}} W_i < T_j \end{cases} \tag{1}$$

式中 j_1，j_2，…，j_l 的顺序对应于 $W_{j_1} \geq W_{j_2} \geq \cdots \geq W_{j_l} \geq 0$。设这样的 j_1，j_2，…，j_l 组合之集为 A，则对应的最小纯 j-路集 MPPVS$_j$＝｛（j_1，j_2，…，j_{j_l}，0，…，0）｜下标 j_1，j_2，…，$j_l \in A$｝，式中（j_{j_1}，j_{j_2}，…，j_{j_l}，0，…，0）$\in \underset{i=l,n}{\times} S_i$。

由下述方法求得系统的最小纯 j-路集后，系统的最小 j-路集可由如下的递推过程实现，好：将最小（$j+1$）-路集中的各项与最小纯 j-路集中的各项进行大小比较，将产者中与后者的各项无大小关系的项并入最小纯 j-路集，即得系统的最小 j-路集；其中，最小 M-路集与最小纯 M-路集相等是上述递推过程的初始条件。这种方法的运算量为 O（2^n）。由此可知，基于定义 8 算法的运算量是定理 3 所述方法运算量的 O（（$\frac{M+1}{2}$）^{n}）倍，当 M 和 n 增大时，倍数以指数级增。

2 实例分析

例 1 设某三态 6 部件关联系统，其正则标准型 MF［W，T］型结构为：［6，5，5，4，3，2；15，15］MF。则使得如下不等式成立的 j_1，j_2，…，j_l 的组合为

$$\begin{cases} 6_1+5_2+5_3>15 \\ 6_1+5_2<15 \end{cases}, \begin{cases} 6_1+5_2+4_4\geq 15 \\ 6_1+5_2<15 \end{cases}, \begin{cases} 5_2+5_3+3_5+2_6>15 \\ 5_2+5_3+3_5<15 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 6_1+5_3+4_4\geq 15 \\ 6_1+5_3<15 \end{cases}, \begin{cases} 6_1+5_3+3_5+2_6>15 \\ 6_1+5_3+3_5<15 \end{cases}, \begin{cases} 6_1+5_2+3_5+2_6>15 \\ 6_1+5_2+3_5<15 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 6_1+4_4+3_5+2_6\geq 15 \\ 6_1+4_4+3_5<15 \end{cases}, \begin{cases} 5_2+5_3+4_4+3_5>15 \\ 5_2+5_3+4_4<15 \end{cases}, \begin{cases} 5_2+5_3+4_4+2_6>15 \\ 5_2+5_3+4_4<15 \end{cases},$$

则最小纯 2-路集

$$\begin{aligned} \mathrm{MPPVS}_2 &= \{(j_{j_1}, j_{j_2}, \cdots, j_{j_l}, 0, \cdots, 0) \mid j_1, j_2, \cdots, j_l \in A, j=2\} \\ &= \{(2,2,2,0,0,0),(2,2,0,2,0,0),(2,0,2,2,0,0),(2,2,0,0,2,2),(2,0,2,0,2,2), \\ &\quad (2,0,0,2,2,2),(0,2,2,0,2,2),(0,2,2,2,2,0),(0,2,2,2,0,2)\}; \end{aligned}$$

相应可以求得系统的最小纯 1-路集

$$\begin{aligned} \mathrm{MPPVS}_1 &= \{(j_{j_1}, j_{j_2}, \cdots, j_{j_l}, 0, \cdots, 0) \mid j_1, j_2, \cdots, j_l \in A, j=1\} \\ &= \{(1,1,1,0,0,0),(1,1,0,1,0,0),(1,0,1,1,0,0),(1,1,0,0,1,1),(1,0,1,0,1,1), \\ &\quad (1,0,0,1,1,1),(0,1,1,0,1,1),(0,1,1,1,1,0),(0,1,1,1,0,1)\} \end{aligned}$$

则该系统的最小纯 2-路集 MPPVS$_2$ 等于最小 2-路集 MPVS$_2$，

同时最小纯 1-路集 MPPVS$_1$ 等于最小 1-路集 MPVS$_1$。

例 2 若系统的正则标准型 MF［W，T］型结构为：［6，5，5，4，3，2；14，15］MF，则系统的最小纯 2-路集 MPPVS$_2$ 等于最小 2-路集 MPVS$_2$，并和例 1 的相应项相等；而其最小纯 1-路集 MPPVS$_1$ 可以用相应的方法求得：

$$\mathrm{MPPVS}_1 = \{(j_{j_1}, j_{j_2}, \cdots, j_{j_l}, 0, \cdots, 0) \mid j_1, j_2, \cdots, j_l \in A, j = 1\}$$

$$= \{(1,1,1,0,0,0),(1,1,0,1,0,0),(1,0,1,1,0,0),(1,1,0,0,1,0),(1,0,1,0,1,0),(1,0,0,1,1,1),(0,1,1,0,1,1),(0,1,0,1,1,1),(0,0,1,1,1,1)\} = \mathrm{MPVS}_1$$

对定义6介绍的最小路集求解方法，由于相应的算法不能用足够简练的篇幅描述，因此本文不作实例运算。可以这样理解：定义6介绍的最小路集求解方法对本文例1、例2都无法在很短的时间内用手工计算来实现，而本文所介绍的方法则反之，足以证明方法的有效性。

3 结束语

定义了一种典型的多态关联系统逻辑结构，该类系统在工程实践中有一定的应用范围，如多态关联系统中串联、并联、[k/n: G] 等典型模型都有相应的 MF [W, T] 型结构。由于这类系统的结构比较特殊，因此也便于对其进行定性分析。将该类系统最小路集的求解转换成一个组合问题的求解，对较大规模的系统，这种方法的运算量远小于一般最小路集求解方法的运算量。

参考文献

1 Barlow R E. Wu A S. Coherent systems with multistate components. Math. Oper. Res., 1978, 13: 275

2 El-Neweihi E. Proschan F. Sethuraman J. multistate coherent systems. J. Appl. Prob, 1978, 115: 675

3 Griffith W S. A Multistate Availability Model. IEEE Trans Reliab, 1982, 31: 97

4 Mazars N. Multinary systems and Reliability. Tech. Rep., Com. of Eur. Com., Joint Research Centre, 1986

5 Wood A P. Multistate Reliability. Technical Report, PHD Thesis, Office of Naval Research, 1983

6 Yukio Hatoyama. Reliability Analysis of 3-State systems. IEEE Trans Reliab, 1979, 28: 386

7 Griffith W S. Multistate reliability models. J. Appl. Prob, 1980, 17: 735

8 Ohi F. Nishida T. On an extension of BW systems-Basic probeties. J. Oper., Research Soc. of Japan, 1989, 2

9 Rine D C. Computer Science and MVL theory and applications. Elsevier slience publishers, 1984

10 Mine H, Yamamoto. Testing and realization of three valued majority functions. Proc. of ISMVL, 1981: 157